Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

Classes de Fitting e a Secção de Lockett

Fábio Emanuel Martins Silva

Dissertação
Mestrado em Matemática

Orientador: Professor Doutor Owen John Brison

2013

Abstract

The study of classes of finite groups had its origins with the work of Gaschütz [21]. However, the main focus of this thesis will be on the concepts developed by Fischer [17], in an attempt to dualize this work. With this tools in hand, we will prove one important theorem of Fischer et al. [18], that relates Fitting classes and injectors (both for the case of finite soluble groups), previously introduced. Within the theory Fitting classes of finite groups, we will study the works of Lockett [32], [33] and [34], envolving the Lockett section, trying to answer some questions about the relation between the direct product of radicals and the radical of the direct product, of a finite group. Also in that scope, we will briefly introduce normal Fitting classes. In the fourth chapter we will construct the Lausch group and prove some results involving the relation between it and a given Fitting pair. We also present here some results by Lausch [31] and generalized by Bryce and Cossey [9], involving some theoretical aproaches to the description of the class $\mathfrak{F}_*$ and the radical $G_{\mathfrak{F}_*}$. The construction of Lausch will provide us with an important tool to develop in the last chapter. There, with the help of the work developed by Brison [6] and [7], on the ideas of Berger [4], we aim to deepen the results about the radical $G_{\mathfrak{F}_*}$, trying to give a more practical description than the previous one.

Keywords: classes of finite groups, Fitting classes, injectors, Lockett section, Lockett operations, radical of a group, normal Fitting classes, Lausch group, Fitting pair, Berger's theorem.

2010 Mathematics Subject Classification: 20D10, 20F17.

Resumo

O estudo das classes de grupos finitos teve a sua origem com o trabalho de Gaschütz [21]. No entanto, o tema central desta tese serão os conceitos desenvolvidos por Fischer [17], numa tentativa de dualizar a teoria construída por Gaschütz. Com estas ferramentas, provaremos um teorema importante de Fischer et al. [18], que relaciona as classes de Fitting e os injectores (ambos para o caso dos grupos finitos e resolúveis), previamente introduzidos. Na teoria das classes de Fitting, iremos estudar os trabalhos de Lockett [32], [33] e [34], envolvendo a Secção Lockett e tentando responder a algumas questões acerca da relação entre o produto directo dos radicais e o radical do produto directo, de um grupo finito. Também nesse âmbito, introduziremos brevemente as classes de Fitting normais. No quarto capítulo construíremos o grupo de Lausch e provaremos alguns resultados envolvendo a relação entre este e um par de Fitting dado. Ainda neste capítulo apresentaremos alguns resultados devidos a Lausch [31] e que foram posteriormente generalizados por Bryce and Cossey [9], envolvendo descrições teóricas, quer da classe $\mathfrak{F}_*$, quer do radical $G_{\mathfrak{F}_*}$. A construção de Lausch dar-nos-á então uma ferramenta importante para desenvolvermos o último capítulo. Nesse capítulo, com a ajuda do trabalho desenvolvido por Brison [6] e [7], acerca das ideias de Berger [4], pretendemos apresentar uma descição mais detalhada do radical $G_{\mathfrak{F}_*}$.

Palavras-chave: classes de grupos finitos, classes de Fitting, injectores, secção de Lockett, operações de Lockett, radical de um grupo, classes de Fitting normais, grupo de Lausch, par de Fitting, teorema de Berger.

2010 Mathematics Subject Classification: 20D10, 20F17.

Conteúdo

Introdução

Para a maioria dos matemáticos, o teorema de Sylow [42] representa certamente um dos resultados mais importantes ao nível da teoria elementar dos grupos finitos. Tal como este, os resultados de Hall [22] e Carter [11] são também conquistas extremamente importantes desta teoria e como posteriores generalizações uns relativamente aos outros, podem ser vistos de certa forma como análogos.
Foi nisso que Gaschütz reparou no seu artigo *Zur theorie der endlichen auflösbaren Gruppen* [21], onde apresenta extensões destas ideias, agora não do ponto de vista dos grupos em si, mas de colecções de grupos com a mesma propriedade (classes de grupos). Este artigo marca o início dum intenso trabalho, desenvolvido por um grande número de matemáticos, em torno da questão das classes de grupos.
Assunto este que, embora numa primeira fase tenha sido tratado apenas para classes de grupos finitos e resolúveis, rapidamente se percebeu que uma grande parte dos resultados desta teoria poderiam ser generalizados para o caso das classes de grupos finitos. Tendo como ponto de partida o referido trabalho de Gaschütz, o que Fischer pretendeu fazer durante o seu *Habilitationsschrift* [17] (Habilitação), foi tentar dualizar a teoria previamente introduzida. É então, com base nestas ideias que, posteriomente, Fischer, Gaschütz e Hartley [18] introduzem o estudo das classes de Fitting, tema central deste trabalho.
Tendo como ponto de partida o que acima foi descrito, este trabalho pretende expor a teoria das classes de Fitting, sempre que possível dum ponto de vista dos grupos finitos.
Assim sendo, no primeiro capítulo pretendemos introduzir conceitos básicos para o desenvolvimento destas ideias.
Introduzida no primeiro capítulo a ideia de classe de grupos, no segundo, motivamos o estudo das classes de Fitting e apresentamos a dualização das ideias de Gaschütz, com especial enfoque para a caracterização das classes de Fitting como sendo classes injectivas.
Partindo da definição de classe de Fitting previamente definida, o capítulo 3 desenvolve-se em torno dos trabalhos iniciados por Lockett [32], [33] e [34], que pretendem responder à questão do relacionamento entre o radical do produto directo de um grupo e o produto directo dos radicais desse grupo, para uma dada classe de Fitting. Consequentemente serão tratadas neste capítulo as operações de Lockett, introduzidas na tentativa de responder à questão anterior. Na sequência

apresentamos também as classes de Fitting normais e algumas das suas propriedades.
Os capítulos 4 e 5 estão fortemente relacionados. No capítulo 4 introduzimos o grupo de Lausch, mostrando alguns resultados teóricos sobre a descrição da classe $\mathfrak{F}_*$ e dos radicais $G_{\mathfrak{F}_*}$. Vemos também resultados devidos a Lausch [31] e Bryce e Cossey [9] relacionando certas classes de Fitting e os seus pares de Fitting.
Utilizando o grupo de Lausch, no capítulo 5 apresentamos as ideias de Brison [6] e [7] para demonstrar o teorema de Berger [4], que nos dá uma descrição muito mais detalhada do que a anterior relativamente aos radicais $G_{\mathfrak{F}_*}$, nomeadamente quando $\mathfrak{F}$ é uma classe de Fischer. É com intuito de fazer o contraponto entre os resultados de Lausch e de Berger que decidimos separar estes dois capítulos.

Gostava de deixar aqui o meu agradecimento ao professor Brison, por todo o apoio que me prestou.
Agradeço também à minha família e aos meus amigos, em especial aos meus pais e irmão e à Clara.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados essenciais para desenvolver o nosso estudo. A maioria será deixada sem demonstração, sendo que se necessário, poderá ser consultada num livro clássico de teoria de grupos como por exemplo: [8], [27], [39], [38], [39], ou [40] da nossa bibliografia.
Introduzimos também o estudo das classes de grupos finitos.
A menos que referido, todos os grupos considerados neste trabalho são finitos.

1.1 Resolubilidade e Nilpotência

Definição 1.1.1. Sejam G um grupo e $H \leqslant G$. H diz-se *característico em* G, H *car* G, se $H^\alpha = H, \forall \alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ e $\mathrm{Aut}(G) = \{\alpha : \alpha$ é um automorfismo de $G\}$.

Definição 1.1.2. Sejam G um grupo, $x, y \in G$, $H, K \leqslant G$. Definimos:

(a) $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ (*comutador* de x e y);

(b) $[H, K] = \langle [h, k] : h \in H, k \in K\rangle$;

(c) $G' = [G, G]$ (*grupo derivado*);

(d) $G^{(0)} = G$, $G^{(1)} = G'$ e dado $n \in \mathbb{N}$, $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$;

(e) $G = G^{(0)} \geqslant G^{(1)} \geqslant G^{(2)} \geqslant \ldots$ (*série derivada* de G).

Definição 1.1.3. Seja G um grupo e $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geqslant 2$. Então:

(a) Para $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{N}$, definimos o *n-ésimo comutador*, $[g_1, \ldots, g_n]$ recursivamente da seguinte forma:

$$[g_1, \ldots, g_n] = [[g_1, \ldots, g_{n-1}], g_n].$$

(b) Se $G_1, \ldots, G_n \leqslant G$, definimos

$$[G_1, \ldots, G_n] = \langle [g_1, \ldots, g_n] : g_i \in G_i \rangle \; (i \in \{1, \ldots, n\}).$$

Definição 1.1.4. Um grupo G diz-se *resolúvel* se existe um número natural n, tal que $G^{(n)} = 1$.

Proposição 1.1.1. *Sejam G um grupo, $H \leqslant G$ e α um homomorfismo de grupos de G e $n, m \in \mathbb{N}$. Temos:*

(a) $H^{(n)} \leqslant G^{(n)}$*;*

(b) $(G^{\alpha})^{(n)} = (G^{(n)})^{\alpha}$*;*

(c) $(G^{(n)})^{(m)} = G^{(n+m)}$

(d) $G^{(n)}$ *car* G*.*

Proposição 1.1.2. *Sejam G um grupo, $H \leqslant G$. Então:*

(a) Se G for resolúvel, então H também o é;

(b) Se G for resolúvel e α for um homomorfismo de G, então G^{α} é resolúvel;

(c) Se $H \trianglelefteq G$ for resolúvel e G/H também o for, então G é resolúvel.

Observação. Sai da alínea b) da proposição anterior que se $H \trianglelefteq G$ e G for resolúvel então H também o é.

Definição 1.1.5. Seja G um grupo e $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que a série

$$1 = G_n \leqslant \cdots \leqslant G_1 \leqslant G_0 = G$$

(a) é uma *série de composição* de G se $G_{i+1} \trianglelefteq G_i$ e cada *factor de composição*, G_i/G_{i+1} for simples, onde $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$;

(b) é uma *série principal* de G se $G_i \trianglelefteq G$ e G_i/G_{i+1} for minimal normal $(\cdot \trianglelefteq)$ em G/G_{i+1}, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Definição 1.1.6. Seja G um grupo, definimos o seguinte conjunto:

$$\mathrm{comp}(G) = \{p \in \mathbb{P} : G \text{ possui um factor de composição de ordem } p\}$$

Proposição 1.1.3. *Seja G um grupo resolúvel e $1 \neq N \cdot \trianglelefteq G$. Então N é* elementar abeliano*, ou seja, $N \simeq C_p \times C_p \times \cdots \times C_p$ para algum $p \in \mathbb{P}$.*

Proposição 1.1.4. *Seja G um grupo. As afirmações seguintes são equivalentes:*

(a) G é resolúvel;

(b) G tem uma série principal, onde cada factor de composição é elementar abeliano;

(c) G tem uma série de composição, onde cada factor de composição é cíclico de ordem prima.

Proposição 1.1.5. *Seja G um grupo e $H, K \trianglelefteq G$. Então:*

(a) Se H e K forem resolúveis, então HK também o é;

(b) Se G/H e G/K forem resolúveis, então $G/(H \cap K)$ também o é.

A proposição anterior tem como consequência imediata as seguintes definições:

Definição 1.1.7. Seja G um grupo. Definimos:

(a) $G_{\mathfrak{S}} = < H : H \trianglelefteq G, G/H$ é resolúvel $>$, o *radical resolúvel* de G;

(b) $G^{\mathfrak{S}} = \bigcap\{H : H \trianglelefteq G$ e G/H é resolúvel $\}$, o *resíduo resolúvel de G.*

Observação. Decorre imediatamente da proposição anterior que $G_{\mathfrak{S}}$ é o maior subgrupo normal e resolúvel de G e que $G/G^{\mathfrak{S}}$ é o maior grupo quociente e resolúvel de G.

Definição 1.1.8. Seja G um grupo. A *série central descendente* é a cadeia de subgrupos de G definida da seguinte forma:

$$\gamma_1(G) = G$$

$$\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G], \text{para cada } i \in \mathbb{N}.$$

Definição 1.1.9. Um grupo é *nilpotente* se $\gamma_{n+1}(G) = 1$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Ao menor n, tal que $\gamma_{n+1}(G) = 1$ chamamos, *classe de nilpotência* de G.

É fácil de ver que se um grupo for nilpotente então é resolúvel.

Definição 1.1.10. O *subgrupo de Frattini*, $\Phi(G)$ de um grupo G, é a intersecção de todos os seus subgrupos maximais:

$$\Phi(G) = \bigcap_{M \lessdot\, G} M.$$

Definição 1.1.11. Seja G um grupo. A *série central ascendente* é a cadeia de subgrupos:

$$Z_0(G) = G$$

$$Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G)), \text{ para cada } i \in \mathbb{N}_0,$$

que são característicos em G.

Definição 1.1.12. Dado G um grupo, o *hipercentro de* G, $Z_\infty(G)$, é construído à custa dos subgrupos definidos anteriormente, da seguinte forma:

$$Z_\infty(G) = \bigcup_{i=0}^{\infty} Z_i(G).$$

Proposição 1.1.6. *Seja G um grupo. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\gamma_{n+1}(G) = 1$*, para algum* $n \in \mathbb{N}$*;*

(b) $Z_n(G) = G$*, para algum* $n \in \mathbb{N}$*.*

De seguida apresentamos uma caracterização dos grupos finitos e nilpotentes, sem exibir a sua demonstração.

Proposição 1.1.7. *Seja G um grupo. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) G é nilpotente;

(b) Qualquer subgrupo de Sylow de G é normal;

(c) para cada $H < G$, $H < N_G(H)$;

(d) G é um produto directo de p-grupos;

(e) $G' \leqslant \Phi(G)$;

(f) Cada subgrupo maximal próprio de G é normal.

Dois conceitos muito importantes na teoria dos grupos finitos e que estão na base do aparecimento da investigação em torno das classes de grupos, são os subgrupos de Sylow e os subgrupos de Hall, conforme abaixo apresentados.

Definição 1.1.13. Seja G um grupo tal que $|G| = p^n m$, onde $p \in \mathbb{P}$, $m, n \in \mathbb{N}$ e $m.d.c.(p, m) = 1$. Um subgrupo $S \leqslant G$ tal que $|S| = p^n$, diz-se um *p-subgrupo de Sylow* de G. Denotamos por $Syl_p(G)$, o conjunto de todos os p-subgrupos de Sylow de G.

Definição 1.1.14. Seja $\pi \subseteq \mathbb{P}$ e $\pi' = \mathbb{P} \backslash \pi$.

(a) Se $\pi \neq \varnothing$, um *π-número* é um número $n \in \mathbb{N}$ tal que se $p \mid n$, então $p \in \pi$. Se $\pi = \varnothing$, então 1 é o único π-número;

(b) Dizemos que um grupo G é um π-grupo, se $|G|$ é um π-número;

(c) Seja G um grupo. Dizemos que $H \leqslant G$ é um *subgrupo de Hall de G*, se $m.d.c.(|H|, |G : H|) = 1$. Um *π-subgrupo de Hall de G*, é um subgrupo $H \leqslant G$ tal que $|H|$ é um π-número e $|G : H|$ é um π'-número.
$Hall_\pi(G)$ denota o conjunto dos π-subgrupos de Hall de G.

1.2 Produtos Directos e Semidirectos

Dado G um grupo e $H, N \trianglelefteq G$ tais que $G = HN$ e $H \cap N = 1$, dizemos que G é o produto directo interno de H e N e é bem conhecido que $G \simeq H \times N$ (produto directo externo de H e N). Se enfraquecermos um pouco uma das condições anteriores, obtemos a seguinte:

Definição 1.2.1. Seja G um grupo e $H, N \leqslant G$. Se:

(a) $G = HN$;

(b) $N \trianglelefteq G$;

(c) $H \cap N = 1$.

Dizemos que G é um *produto semidirecto "interno"* de H e de N.

Observação. Sendo G um produto semidirecto "interno" de H e de N, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo temos

$$G/N = NH/N \simeq H/(H \cap N) = H/1 \simeq H$$

e dizemos que G é uma extensão de N por H;
Como $N \trianglelefteq G$, dado $h \in H$, a conjugação por h induz um automorfismo $\varphi_h : n \mapsto n^h$ de N (automorfismo interior de G), para cada $n \in N$. Vemos facilmente que a aplicação $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N) : b \mapsto \varphi_b$ é um homomorfismo de grupos e que $ker(\varphi) = C_H(N)$.

Tentando inverter a situação acima descrita chegamos ao

Teorema 1.2.1. *Dados H e N grupos e $\varphi : H \to Aut(N)$ um homomorfismo, o conjunto $G = \{(n,h) : n \in N, h \in H\}$ é um grupo sob a multiplicação:*

$$(n_1,h_1)(n_2,h_2) = (n_1\varphi_{h_1}(n_2), h_1h_2)\ \forall n_1,n_2 \in N, \forall h_1,h_2 \in H,$$

O elemento identidade de G é $(1_N, 1_H)$ e dados $n \in N$, $h \in H$, o inverso de (n,h) é $(\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})$. Para além disso, considerando

$$N_0 = \{(n,1) : n \in N\} \text{ e } H_0 = \{(1,h) : h \in H\}$$

temos que $H_0 \leqslant G$, $N_0 \trianglelefteq G$, $N_0 \cap H_0 = 1_G$ e $G = H_0N_0$. Portanto G um produto semidirecto de H_0 e N_0.

Definição 1.2.2. Sejam H e N grupos e $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ um homomorfismo. $G = \{(n,h) : n \in N, h \in H\}$ com a multiplicação definida por:

$$(n_1,h_1)(n_2,h_2) = (n_1\varphi_{h_1}(n_2), h_1h_2)\ \forall n_1,n_2 \in N, \forall h_1,h_2 \in H$$

é um grupo, que designamos por *produto semidirecto ("externo")* de H e N e escrevemos $G = N \rtimes H$[1].

Notação. A notação acima utilizada é um cruzamento entre os símbolos $\times$ e $\trianglelefteq$ e diz-nos qual dos subgrupos H ou N é normal. Porém a notação não é completamente satisfatória, pois para a construção acima precisamos também do homomorfismo $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$. Por isso, por vezes escrevemos $G = N \underset{\varphi}{\rtimes} H$, como alternativa.

De seguida vamos estudar um caso especial do produto semidirecto acima construido, que designamos por produto em coroa regular ou standard[2].

[1]Para exemplos da construção exibida consultar Brison [8].
[2]Na terminologia anglo-saxónica "regular wreath product".

Definição 1.2.3. Sejam G e H grupos. Seja $|H| = n$ e escolhamos uma ordem $h_1, h_2 \dots h_n$ para os elementos de H. Definimos o *produto em coroa regular* $G \underset{\text{reg}}{\wr} H$ de G por H, como sendo o produto semidirecto $G^n \underset{\varphi}{\rtimes} H$, onde:

(a) G^n é o produto directo de n cópias de G;

(b) Os elementos de G^n são os n-tuplos da forma $(g_1, g_2, \dots, g_n)$, para cada $g_1, g_2, \dots, g_n \in G$;

(c) O automorfismo φ_k de G^n associado com o elemento $k \in H$ é definido por

$$\varphi_k(g_1, g_2, \dots, g_n) = (g_{1\overline{k}}, g_{2\overline{k}}, \dots, g_{n\overline{k}})$$

onde $\overline{k}$ é a permutação de $\{1, 2, \dots, n\}$ definida por $kh_i = h_{i\overline{k}}$[3], para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Proposição 1.2.2. *Dados G e H grupos finitos e $\varphi : H \to Aut(G^{|H|})$ como na definição anterior. Para cada $h, k \in H$, $\varphi_{hk} = \varphi_h\varphi_k$. Logo φ é um homomorfismo.*[4]

Dado $W = G \underset{\text{reg}}{\wr} H$ como na definição anterior, a $G^{|H|} \trianglelefteq W$ chamamos grupo da base de W e escrevemos G^* em vez de $G^{|H|}$. Ao grupo H chamamos grupo do topo.

Teorema 1.2.3. *Seja G um grupo finito e $N \trianglelefteq G$. Então existe um monomorfismo*

$$\mu : G \to W := N \underset{\text{reg}}{\wr} (G/N)$$

tal que $N^*\mu(G) = W$ e $\mu(N) = \mu(G) \cap N^*$.

Demonstração. Seja $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ um transversal à direita de N em G, ou seja

$$G = Ng_1 \,\dot\cup\, Ng_2 \,\dot\cup \dots \dot\cup\, Ng_r.$$

Se $x \in G$ e $1 \leqslant i \leqslant r$, então $Ng_ix = Ng_j$ onde $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ depende apenas de i e de $\overline{x} := Nx \in G/N$. Se escrevermos $j = i\overline{x}$, então $i \mapsto i\overline{x}$ define uma representação por permutações de G/N sobre $\{1, 2, \dots, r\}$, ou seja, $i(\overline{xy}) = (i\overline{x})\overline{y}$. Logo existe um único $n_i(x) \in N$ tal que

$$g_ix = n_i(x)g_{i\overline{x}} \;.$$

[3]Escrevemos $i\overline{k}$ em vez de $\overline{k}(i)$ para não sobrecarregar a notação mais adiante.

[4]Desta proposição resulta que o semidirecto da definição 2.3 está bem construído e portanto $G \underset{\text{reg}}{\wr} H$ é um grupo.

A aplicação $G/N \to (G/N)$ definida por $Ng_i \mapsto Ng_{i\overline{x}} = Ng_ix = Ng_iNx$ é a permutação induzida em G/N pela acção de Nx na representação por permutações regular à direita e portanto equivalente à representação por permutações de G/N sobre $\{1, 2, \ldots, r\}$ anteriormente citada. Se $x, y \in G$,

$$n_i(xy)g_{i(\overline{xy})} = g_i(xy) = (g_ix)y = n_i(x)n_{i\overline{x}}(y)g_{(i\overline{x})\overline{y}}$$

e portanto

$$n_i(xy) = n_i(x)n_{i\overline{x}}(y)$$

Define-se uma aplicação $\mu : G \to W$ da seguinte forma:

$$\mu(x) = ((n_1(x), \ldots, n_r(x)), \overline{x}) \in W = N \underset{\text{reg}}{\wr} (G/N).$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \mu(xy) &= ((n_1(xy), \ldots, n_r(xy)), \overline{xy}) \\ &= ((n_1(x)n_{1\overline{x}}(y), \ldots, n_r(x)n_{r\overline{x}}(y)), \overline{xy}) \\ &= ((n_1(x), \ldots, n_r(x)(n_{1\overline{x}}(y), \ldots, n_{r\overline{x}}(y)), \overline{xy}) \\ &= ((n_1(x), \ldots, n_r(x)\varphi_x(n_1(y), \ldots, n_r(y)), \overline{xy}) \\ &= ((n_1(x), \ldots, n_r(x)), \overline{x})((n_1(y), \ldots, n_r(y)), \overline{y}) \\ &= \mu(x)\mu(y). \end{aligned}$$

Concluímos que μ é um homomorfismo. Seja $x \in \ker(\mu)$, então $x \in N$ e $n_1(x) = 1$. Portanto temos $Ng_1x = Ng_1$ e $g_1x = g_1$, donde $x = 1$. Logo μ é um monomorfismo.
Claramente, $N^*\mu(G) = W$. Para além disso é também claro que $\mu(x) \in N^*$ se e só se $x \in N$. Sai então que $\mu(N) = \mu(G) \cap N$, como queríamos. $\square$

Corolário. *Seja $p \in \mathbb{P}$ e P um p-grupo de ordem p^n, onde $n \in \mathbb{N}$. Então P é isomorfo a um subgrupo de*

$$(\ldots((C_p \underset{\text{reg}}{\wr} C_p) \underset{\text{reg}}{\wr} C_p) \ldots \underset{\text{reg}}{\wr} C_p),$$

onde constam $n-1$ sinais "$\underset{\text{reg}}{\wr}$".

Demonstração. Definimos $W_1 = C_p$ e $W_n = W_{n-1} \underset{\text{reg}}{\wr} C_p$, onde $i \in \{2, \ldots, n\}$. W_n é portanto o produto em coroa acima mencionado. A demonstração segue agora por indução em n. Se $n = 1$, então $P \simeq C_p = W_1$.
Suponhamos que $n > 1$ e seja $Q \trianglelefteq\cdot P$. Então $|Q| = p^{n-1}$ e por hipótese de indução $Q \simeq R \leqslant W_{n-1}$. Pelo teorema anterior $P \simeq \mu(P) \leqslant Q \underset{\text{reg}}{\wr} (P/Q) \simeq Q \underset{\text{reg}}{\wr} C_p$.

Concluímos que P é isomorfo a um subgrupo de $Q \underset{\text{reg}}{\wr} C_p$. Mas

$$Q \underset{\text{reg}}{\wr} C_p \simeq R \underset{\text{reg}}{\wr} C_p \leqslant W_{n-1} \underset{\text{reg}}{\wr} C_p = W_n$$

e portanto W_n contém um subgrupo isomorfo a P, como queríamos. $\square$

Definição 1.2.4. Sejam $G_1, G_2, \ldots, G_n$ grupos e $A = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$. Se $H \leqslant A$, dizemos que H é um *produto subdirecto* de $G_1, G_2, \ldots, G_n$ se $\pi_i(H) = G_i$, onde $\pi_i : A \to G_i$ é a i-ésima projecção ($\pi_i(A) = G_i$), $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Exemplo 1.2.1. Seja G um grupo e defina-se $\mathrm{Diag}(G \times G) = \{(g, g) : g \in G\}$. Temos que $\mathrm{Diag}(G \times G) \leqslant (G \times G)$ e $\pi_i(\mathrm{Diag}(G \times G)) = G$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Portanto $\mathrm{Diag}(G \times G)$ é um produto subdirecto de $G \times G$.

Definição 1.2.5. Sejam G e H grupos e suponhamos que para cada $g \in G$ e $h \in H$, $g^h \in G$ é tal que:

$$\text{a correspondência } g \to g^h \text{ é um automorfismo e}$$
$$g^{(hk)} = (g^h)^k, \text{ para cada } g \in G, h, k \in H.$$

Dizemos que H é um *grupo de operadores* sobre G.

1.3 A Transferência

A construção da transferência tem a sua origem numa técnica desenvolvida por W. Burnside. A sua principal aplicação foi o estudo da existência de um subgrupo normal (próprio) de um grupo G (não necessariamente finito). Esta técnica teve uma grande importância para o estudo da simplicidade de um grupo.
No capítulo 5 veremos como esta técnica também foi importante para o estudo das classes de Fitting.

Definição 1.3.1. Seja G um grupo (não necessariamente finito), $H \leqslant G$ com índice finito, digamos $|G : H| = n$ e $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ um transversal à direita de H em G, ou seja:

$$G = Ht_1 \mathbin{\dot\cup} Ht_2 \mathbin{\dot\cup} \ldots \mathbin{\dot\cup} Ht_n$$

Para cada $g \in G$ e $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, temos que $Ht_ig = Ht_j$, para algum $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, onde j depende de i e de g. Pelo que vimos acima, existe $h = h_i \in H$

tal que $t_i g = h_i t_j$, sendo que h_i depende não só de i e de g, como também dos representantes das classes laterais acima. Se $H' \leqslant H_0 \leqslant H$ definimos a aplicação

$$V = V_{G\to H/H_0} : G \to H/H_0, \text{ onde } (g)V = (g)V_{G\to H/H_0} = \prod_{i=1}^{n} h_i\, H_0,$$

à qual damos o nome de *transferência*[5] de G para H/H_0.

Teorema 1.3.1. *Seja G um grupo, $H' \leqslant H_0 \leqslant H \leqslant G$ tal que $|G : H| = n$ e $V = V_{G\to H/H_0} : G \to H/H_0$ a transferência de G para H/H_0. Então:*

(a) A definição de V é independente da escolha do transversal à direita de H em G;

(b) A aplicação V é um homomorfismo.

Observação. Dado G um grupo e $H' \leqslant H_0 \leqslant H_1 \leqslant H \leqslant G$ tal que $|G : H| = n$, é trivial verificar que $V_{G\to H/H_1} = V_{G\to H/H_0} \circ \nu$, onde ν é o homomorfismo canónico $\nu : H/H_0 \to H/H_1$.
Temos que $G/\ker(V) \simeq \mathrm{Im}(V) \leqslant H/H_0$ e H/H_0 é abeliano, portanto $\ker(V) \geqslant G'$. Se $\mathrm{Im}(V) \neq 1$ temos que $\ker(V) \trianglelefteq G$ e $\ker(V) \neq G$ e sai que G não pode ser simples (nem abeliano, pois $G' \lneqq G$), indo de encontro às observações que tínhamos feito no início da secção.

Definição 1.3.2. Seja G um grupo e $H, K \leqslant G$. Definimos:

$$\{H, K\} = \left\langle h^{-1}h^k : h \in H, k \in K, h^k \in H \right\rangle .$$

A $\{H; G\} \leqslant G$ damos o nome de *subgrupo focal* de H em G.

Observação. Claramente $H' \leqslant \{H; G\} \leqslant H \cap G' \leqslant H$, donde $\{H; G\} \trianglelefteq H$.

Teorema 1.3.2 (Subgrupo Focal)**.** *Sejam G um grupo e $H \in \mathrm{Hall}(G)$. Então:*

$$\{H; G\} = H \cap G' = H \cap \ker(V_{G\to H/H'}).$$

Proposição 1.3.3. *Seja A um grupo e suponhamos que $D \trianglelefteq C \leqslant B \leqslant A$, onde C/D é abeliano. Temos o seguinte:*

(a) Se $b \in B$ e $x \in A$, então $\left((b)V_{B\to C/D}\right)^x = (b^x)V_{B^x\to C^x/D^x}$;

[5] O símbolo V vem da palavra alemã “Verlagerung”, que significa transferência.

(b) Se $b \in B$ e $y \in A$, então $\left((b)V_{B\to C/D}\right)^y = (b)V_{B\to C^y/D^y}$.

Demonstração. Suponhamos que:

$$B = Cu_1 \,\dot\cup\, Cu_2 \,\dot\cup\, \ldots \,\dot\cup\, Cu_n.$$

Se $a \in B$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$, definimos $i(a)$ por $Cu_i a = Cu_{i(a)}$. Sendo b e x como na hipótese, temos que:

(a) Supondo que $g_i = u_i b u_{i(b)}$, então:

$$(b)V_{B\to C/D} = \prod_{i=1}^{n} g_i D.$$

Ora,

$$B^x = C^x u_1^x \,\dot\cup\, C^x u_2^x \,\dot\cup\, \ldots \,\dot\cup\, C^x u_n^x$$

e, para $i \in \{1, \ldots, n\}$, $C^x u_i^x b^x = Cu_{i(b)}^x$. Mais, como $u_i^x b^x (u_{i(b)}^x)^{-1} = g_i^x$, concluímos que:

$$(b^x)V_{B^x\to C^x/D^x} = \prod_{i=1}^{n} g_i^x D^x = \left((b)V_{B\to C/D}\right)^x.$$

(b) Supondo que $y \in B$, temos:

$$(b)V_{B\to C^y/D^y} = (b^y)V_{B^y\to C^y/D^y} = \left((b)V_{B\to C/D}\right)^y,$$

onde na segunda igualdade utilizamos a alínea anterior.

Proposição 1.3.4. *Seja G um grupo. Se $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $P^* = \{P; G\}$, $n = |G : P|$ e $x \in P$, então $(x)V_{G\to P/P^*} = x^n P^*$.*

1.4 Sistemas de Hall de grupos finitos e resolúveis

Os resultados nesta secção apresentados, como o acima indicado, envolvem apenas grupos finitos e resolúveis. Estes devem-se essencialmente ao trabalho apresentado por P. Hall em 1937, *On the Sylow systems of a soluble group.* Como podemos ver pelo título, estes sistemas foram originalmente chamados como sistemas de Sylow. Apesar disso denotamo-los como sistemas de Hall.

De forma a podermos introduzir este conceitos, apresentamos as seguintes definições:

Definição 1.4.1. Dado G um grupo, definimos:

$$\pi(G) = \{p \in \mathbb{P} : p \mid |G|\}.$$

Definição 1.4.2. Dados $p \in \mathbb{P}$ e G um grupo finito e resolúvel. Dizemos que $H \leqslant G$ é um *p-complemento de Sylow de G*, se $H \in \mathrm{Hall}_{p'}(G)$.
Uma *base de complementos* para G, é um conjunto contendo exactamente um p-complemento de Sylow de G para cada $p \in \pi(G)$.

Definição 1.4.3. Seja G um grupo finito e resolúvel e $K = \{H_i : p_i \in \pi(G)\}$. Para cada $\tau \subseteq \pi(G)$, ponhamos $G_\tau = \bigcap\{H_i : p_i \in \pi(G)\backslash\tau\}$.
Dizemos que $\Sigma = \{G_\tau : \tau \subseteq \pi(G)\}$ é um *sistema de Hall de G*.

As proposições aqui apresentadas, serão dadas sem demonstração. O nosso interesse neste tema é apenas o de podermos apresentar alguns resultados no capítulo referente à Secção de Lockett.[6]

Proposição 1.4.1. *Dados G um grupo finito e resolúvel e Σ e Σ' sistemas de Hall de G, então $\Sigma' = \Sigma^g$, para algum $g \in G$.*

Definição 1.4.4. Seja G um grupo finito e resolúvel e $\Sigma = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ um sistema de Hall de G. Definimos $N_G(\Sigma) = \bigcap_{i=1}^{n} N_G(H_i)$.

Definição 1.4.5. Seja G um grupo finito e resolúvel, $H \leqslant G$ e Σ uma sistema de Hall de G. Dizemos que Σ *se reduz a H*, $\Sigma \searrow H$, se $\Sigma \cap H$ for um sistema de Hall de H.

Definição 1.4.6. Dado G um grupo finito e resolúvel e $H \leqslant G$, dizemos que H é pronormal em G (H *pr* G) se, para qualquer $g \in G$, H e H^g forem conjugados em $\langle H, H^g\rangle$.

Teorema 1.4.2 (Mann [35])**.** *Dado G um grupo finito e resolúvel, H pr G se e só se cada sistema de Hall se reduz num único conjugado de H em G.*

[6] Para uma consulta mais detalhada vide Mann [35], Doerk and Hawkes [15], Lockett [33] e Lockett [32], nos quais esta apresentação se baseou.

Corolário (Lockett [33]). *Seja Σ um sistema de Hall de G (finito e resolúvel). Se $D = N_G(\Sigma)$ e Σ se reduz a H pr G, então D normaliza H e Σ reduz-se a $N_G(H)$.*

Teorema 1.4.3 (Fischer, cf. Lockett [32]). *Seja G um grupo finito e resolúvel e suponhamos que o sistema de Hall, Σ de G, se reduz a cada um dos subgrupos pronormais $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Pondo $H = \langle H_1, H_2, \ldots, H_n \rangle$, então $\Sigma \searrow H$.*

1.5 Classes de Grupos e Propriedades Gerais

A teoria de conjuntos não admite o conjunto de todos os grupos com uma determinada propriedade.
As classes consideradas neste trabalho estão contidas na classe $\mathfrak{E}$ de todos os grupos finitos. Adiante no texto restringirnos-emos, em alguns casos, à classe $\mathfrak{S}$ de todos os grupos finitos e resolúveis.

Definição 1.5.1. Dizemos que $\mathfrak{X}$ é uma *classe de grupos* se:

(a) todos os grupos de $\mathfrak{X}$ são finitos;

(b) se G pertence a $\mathfrak{X}$ então qualquer grupo H isomorfo a G também pertence a $\mathfrak{X}$ ($\mathfrak{X}$ é fechado para isomorfismo);

(c) todos os grupos de ordem 1 pertencem a $\mathfrak{X}$.

Uma vez que determinadas classes irão surgir recorrentemente, listamos abaixo algumas das mais importantes:

- $\mathfrak{E}$, a classe dos grupos finitos;
- $\mathfrak{S}$, a classe dos grupos finitos e resolúveis;
- $\mathfrak{N}$, a classe dos grupos finitos e nilpotentes;
- $\mathfrak{S}_p$, a classe dos p-grupos finitos e resolúveis;
- $\mathfrak{S}_\pi$, a classe dos π-grupos finitos e resolúveis;
- $\mathfrak{A}$, a classe dos grupos finitos e abelianos.

Notação. Dado um conjunto de grupos C , denotamos por (C) a menor classe de grupos contendo C. Quando temos $C = \{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$ usamos $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$, em vez de $(\{G_1, G_2, \ldots, G_n\})$. No presente texto falamos em classes de grupos e usamos letras maiúsculas góticas (Fraktur) e parêntesis para designar uma determinada classe ($\mathfrak{C} = (...)$), em vez das habituais letras maiúsculas e chavetas ($C = \{\ldots\}$).

Definição 1.5.2. Se $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ forem duas classes de grupos, podemos definir o *produto de classes* da seguinte forma: dado um grupo G, $G \in \mathfrak{XY}$ se e só se existir $N \trianglelefteq G$ tal que $N \in \mathfrak{X}$ e $G/N \in \mathfrak{Y}$.

Observações. Sejam $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ classes de grupos. É trivial verificar que $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{XY}$. O produto de classes acima definido não é comutativo, nem sequer é associativo, embora em certos casos possamos garantir a associatividade. Se tomarmos A_4 subgrupo do grupo simétrico S_4, temos que $A_4 \in (\mathfrak{CC})\mathfrak{C}$, onde $\mathfrak{C}$ é a classe dos grupos cíclicos, pois $A_4 = V_4 \rtimes C_3$ ($V_4 = C_2 \times C_2$, é o grupo de Klein) e $A_4 \notin \mathfrak{C}(\mathfrak{CC})$, pois A_4 não possui subgrupos normais cíclicos não triviais. No entanto, decorre da definição que $\mathfrak{X}(\mathfrak{YZ}) \subseteq (\mathfrak{XY})\mathfrak{Z}$.

Definição 1.5.3. Seja $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos, definimos os seguintes conjuntos:

(a) $\pi(\mathfrak{X}) = \bigcup\{\pi(G) : G \in \mathfrak{X}\}$;

(b) $\mathrm{char}(\mathfrak{X}) = \{p \in \mathbb{P} : C_p \in \mathfrak{X}\}$, ao qual damos o nome de *característica de* $\mathfrak{X}$.

Para podermos fazer uma observação relativamente à definição anterior, damos a seguinte

Definição 1.5.4. Dado $\pi \subseteq \mathbb{P}$ denotamos por $O^{\pi}(G)$ o menor subgrupo normal de G tal que $G/O^{\pi}(G)$ é um π-grupo.

Observação. Claramente $\mathrm{char}(\mathfrak{X}) \subseteq \pi(\mathfrak{X})$. No entanto, em geral não temos a igualdade. Se $\mathfrak{X} = (G : O^{p'}(G) = G)$ for a classe de todos os grupos p'-perfeitos para um dado $p \in \mathbb{P}$, então $\mathrm{char}(\mathfrak{X}) = \{p\} \subsetneq \mathbb{P} = \pi(\mathfrak{X})$.

Pelos exemplos acima, vemos que uma forma natural de construir classes de grupos é exibir uma propriedade (da teoria dos grupos) e construir o classe dos grupos que satisfazem essa propriedade. Nesse sentido, o conceito de operador de fecho vai ser bastante importante, pois irá dar-nos uma outra forma de construir classes de grupos a partir de classes de grupos dadas. Uma aplicação de classes é, como o nome indica, uma aplicação C que a cada classe de grupos $\mathfrak{X}$ faz corresponder uma classe de grupos C$\mathfrak{X}$.

Definição 1.5.5. Dadas $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ classes de grupos e C uma aplicação de classes. Dizemos que C é

(i) um *operador de fecho*, se:

   (a) $\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{C}\mathfrak{X}$ (C é extensiva);

   (b) $\mathrm{C}\mathfrak{X} = \mathrm{C}(\mathrm{C}\mathfrak{X})$ (C é idempotente);

   (c) Se $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$, então $\mathrm{C}\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{C}\mathfrak{Y}$ (C é isótona);

(ii) C-*fechada* se $\mathrm{C}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$.

Dadas aplicações de classes definimos a composição tal como seria de esperar:

$$(\mathrm{AB})\mathfrak{X} = \mathrm{A}(\mathrm{B}\mathfrak{X}).$$

Observação. Decorre imediatamente da definição acima que, se C for um operador de fecho, então C$\mathfrak{X}$ é C-fechada.

Definição 1.5.6. Dados dois operadores de fecho B e C. Dizemos que:

(i) $\mathrm{B} \leqslant \mathrm{C}$, se $\mathrm{B}\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{C}\mathfrak{X}$, para qualquer $\mathfrak{X}$ classe de grupos;

   e dada $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos, definimos:

(ii) $\langle \mathrm{B}, \mathrm{C} \rangle \mathfrak{X}$ como sendo a menor classe de grupos que contém $\mathfrak{X}$ e que é fechada para os operadores B e C.

Exemplos 1.5.1. Abaixo damos uma lista de alguns dos operadores que iremos utilizar mais adiante no texto.

$\mathrm{S}\mathfrak{X} = (G \in \mathfrak{E} : G \simeq K$, onde $K \leqslant H$, para algum $H \in \mathfrak{X})$;

$\mathrm{S}_n\mathfrak{X} = (G \in \mathfrak{E} : G \simeq K$, onde $K \trianglelefteq\trianglelefteq H$, para algum $H \in \mathfrak{X})$;

$\mathrm{Q}\mathfrak{X} = (G \in \mathfrak{E} : G \simeq H/N$, para algum $H \in \mathfrak{X}$ e $N \trianglelefteq H)$;

$\mathrm{D}_0\mathfrak{X} = (G \in \mathfrak{E} : G \simeq N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_r$, onde $N_1, N_2, \ldots, N_r \in \mathfrak{X})$;

$\mathrm{R}_0\mathfrak{X} = (G \in \mathfrak{E} : G/N_1, G/N_2, \ldots, G/N_r \in \mathfrak{X}$, para $N_1, N_2, \ldots, N_r \trianglelefteq G$ e $\bigcap_{i=1}^{r} N_i = 1)$;

$N_0\mathfrak{X} = (G \in \mathfrak{C} : G = \langle N_1, N_2, \ldots, N_r\rangle$, onde $N_1, N_2, \ldots, N_r \trianglelefteq\trianglelefteq G$ e $N_1, N_2, \ldots, N_r \in \mathfrak{X})$;

$E_\Phi\mathfrak{X} = (G \in \mathfrak{C} : G/N \in \mathfrak{X}$, onde $N \trianglelefteq G$ e $N \leqslant \Phi(G))$.[7]

$E_Z\mathfrak{X} = (G \in \mathfrak{C} : N \leqslant Z_\infty(G)$ e $G/N \in \mathfrak{X}$, para algum $N \trianglelefteq G)$

Proposição 1.5.1. *As aplicações de classes acima definidas são operadores de fecho.*

Demonstração. Sai imediatamente que as aplicações de classe acima definidas são extensivas e isótonas. Para além disso é fácil verificar que S, S_n, Q, D_0 e N_0 são idempotentes. Seja $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos.
Verifiquemos que R_0 é idempotente. Pelo facto de R_0 ser extensiva e isótona vem que $R_0\mathfrak{X} \subseteq R_0(R_0\mathfrak{X}) = R_0^2\mathfrak{X}$. Para verificarmos a outra inclusão, seja $G \in R_0^2\mathfrak{X}$. Então, existem $N_1, \ldots, N_r \trianglelefteq G$, tais que $\bigcap_{i=1}^{r} N_i = 1$ e $G/N_i \in R_0\mathfrak{X}$, onde $i \in \{1, \ldots, r\}$. Logo, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, existem $M_{i1}/N_i, \ldots, M_{is_i}/N_i \trianglelefteq G/N_i$, tais que $\bigcap_{j=1}^{s_i} M_{ij} = N_i$ e $(G/N_i)/(M_{ij}/N_i) \in \mathfrak{X}$. Ora, $G/M_{ij} \simeq (G/N_i)/(M_{ij}/N_i)$ e $\bigcap_{i,j} M_{ij} = \bigcap_i N_i = 1$, donde $G \in R_0\mathfrak{X}$ e portanto $R_0^2\mathfrak{X} = R_0\mathfrak{X}$.
Vejamos agora que $E_\Phi^2\mathfrak{X} = E_\Phi\mathfrak{X}$. Analogamente ao que fizemos acima, $E_\Phi\mathfrak{X} \subseteq E_\Phi^2\mathfrak{X}$. Seja $G \in E_\Phi^2\mathfrak{X}$. Então, por definição, existe $N \trianglelefteq G$, onde $N \leqslant \Phi(G)$ e tal que $G/N \in E_\Phi\mathfrak{X}$. Portanto, por sua vez, G/N possui um subgrupo normal, M/N tal que $M/N \leqslant \Phi(G/N)$ e $(G/N)/(M/N) \in \mathfrak{X}$. Ora, como $G/M \simeq (G/N)/(M/N)$, vem que $G/M \in \mathfrak{X}$. Para além disso, é fácil de ver que, $\Phi(G/N) = \Phi(G)/N$ e portanto $M \leqslant \Phi(G)$. Donde $G \in E_\Phi\mathfrak{X}$ e $E_\Phi^2\mathfrak{X} = E_\Phi\mathfrak{X}$.
Resta-nos ver $E_Z^2\mathfrak{X} = E_Z\mathfrak{X}$. Novamente, pelo que se disse $E_Z\mathfrak{X} \subseteq E_Z^2\mathfrak{X}$. Seja $G \in E_Z^2$, dado que, se $K \leqslant Z_\infty(G)$, então $Z_\infty(G/K) = Z_\infty(G)/K$, a prova sai exactamente, como foi feito acima para E_Φ. □

Nota. É um exercício simples verficar que $S_n \leqslant S$, $D_0 \leqslant R_0$ e $D_0 \leqslant N_0$ e que uma classe de grupos é fechada para subgrupos subnormais se e só se for fechada para subgrupos normais. Repare-se também que a dualidade entre os conceitos de quociente e subgrupo normal permite-nos encarar os operadores S_n e N_0 como duais dos operadores Q e R_0, respectivamente.

Definição 1.5.7. Seja $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos. Se $E_\Phi\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, dizemos que $\mathfrak{X}$ é *saturada*.

[7] $\Phi(G)$ denota, como habitualmente, o subgrupo de Frattini de G.

As seguintes definições generalizam as noções de radical resolúvel e resíduo resolúvel, previamente introduzidas.

Definição 1.5.8. Seja $\mathfrak{X}$ uma classe R_0-fechada e G um grupo. Definimos

$$G^{\mathfrak{X}} = \bigcap\{N \trianglelefteq G : G/N \in \mathfrak{X}\},$$

a que damos o nome de $\mathfrak{X}$-*resíduo de* G.

Definição 1.5.9. Seja $\mathfrak{X}$ uma classe N_0-fechada e G um grupo. Definimos

$$G_{\mathfrak{X}} = \langle S \in \mathfrak{X} : S \trianglelefteq\trianglelefteq G\rangle$$

a que damos o nome de $\mathfrak{X}$-*radical de* G.

Observações. O $\mathfrak{X}$-resíduo de G é o menor subgrupo normal de G cujo quociente pertence a $\mathfrak{X}$, enquanto que o $\mathfrak{X}$-radical de G é o maior subgrupo subnormal de G que pertence a $\mathfrak{X}$.

Para apresentarmos um exemplo que decorre da definição acima, enunciamos um teorema central para a teoria dos grupos finitos e nilpotentes (para uma demonstração detalhada, vide p. ex. Brison [8]) e uma definição que dele resulta. O resultado foi demonstrado por H. Fitting em [19], na primeira metade do século XX.

Teorema 1.5.2 (Fitting [19])**.** *Seja G um grupo, $M, N \trianglelefteq G$ e M e N nilpotentes. Então $MN \trianglelefteq G$ e MN é nilpotente.*

Definição 1.5.10. Seja G um grupo. Definimos

$$F(G) = \prod\{N : N \trianglelefteq G \text{ e } N \text{ é nilpotente}\}$$

a que damos o nome de *subgrupo de Fitting de* G.

Exemplo 1.5.1. Seja $\mathfrak{N}$ a classe dos grupos finitos e nilpotentes. Temos que $G_{\mathfrak{N}} = F(G)$.

As proposições que se seguem serão úteis mais adiante.

Proposição 1.5.3. *Seja $\mathfrak{X}$ uma classe R_0-fechada e Q-fechada, G um grupo e $N \trianglelefteq G$. Temos que:*

(a) $G/N \in \mathfrak{X}$ se e só se $G^{\mathfrak{X}} \leqslant N$ e em particular $G^{\mathfrak{X}} = 1$ se e só se $G \in \mathfrak{X}$;

(b) $G^{\mathfrak{X}}$ car G;

(c) $(G/N)^{\mathfrak{X}} = NG^{\mathfrak{X}}/N$.

Demonstração. (a) Resulta imediatamente da definição;
(b) Temos que $(G^{\mathfrak{X}})^{\alpha} \simeq G^{\mathfrak{X}}$. Como, dado $N \trianglelefteq G$, $G/N \simeq G/N^{\alpha}$, em particular $G/(G^{\mathfrak{X}})^{\alpha} \simeq G/G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$. Portanto $G^{\mathfrak{X}} \leqslant (G^{\mathfrak{X}})^{\alpha}$. Pelo que vimos inicialmente, sai $(G^{\mathfrak{X}})^{\alpha} = G^{\mathfrak{X}}$;
(c) Por (a), temos que $(G/N)/(NG^{\mathfrak{X}}/N) \simeq G/NG^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$ e portanto, novamente por (a), $(G/N)^{\mathfrak{X}} \leqslant NG^{\mathfrak{X}}/N$. Ponhamos $S/N = (G/N)^{\mathfrak{X}}$. Logo $N \trianglelefteq S$ e $G/S \simeq (G/H)/(S/H) \in \mathfrak{X}$, donde $G^{\mathfrak{X}} \leqslant S$. Sai que $NG^{\mathfrak{X}} \leqslant S$ e concluímos que $NG^{\mathfrak{X}}/N \leqslant S/N = (G/N)^{\mathfrak{X}}$, como pretendido. □

Proposição 1.5.4. *Seja $\mathfrak{X}$ uma classe N_0-fechada e S_n-fechada e G um grupo. Temos que:*

(a) dado $S \trianglelefteq\trianglelefteq G$, $S \in \mathfrak{X}$ se e só se $S \leqslant G_{\mathfrak{X}}$ e, como consequência $G \in \mathfrak{X}$ se e só se $G = G_{\mathfrak{X}}$;

(b) $G_{\mathfrak{X}}$ car G;

(c) se $S \trianglelefteq\trianglelefteq G$, então $S_{\mathfrak{X}} = S \cap G_{\mathfrak{X}}$.

Demonstração. (a) Se $S \trianglelefteq\trianglelefteq G$ e $S \in \mathfrak{X}$, resulta imediatamente da definição de $G_{\mathfrak{X}}$, que $G_{\mathfrak{X}} \leqslant S$. Se $S \trianglelefteq\trianglelefteq G$ e $S \leqslant G_{\mathfrak{X}} \trianglelefteq\trianglelefteq G$, existe uma série subnormal de G até S que passa por $G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$, como é S_n-fechda vem que $S \in \mathfrak{X}$.
(b) Temos que, dado $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, $(G_{\mathfrak{X}})^{\alpha} \simeq G_{\mathfrak{X}}$ e $(G_{\mathfrak{X}})^{\alpha} \trianglelefteq\trianglelefteq G$ e portanto $(G_{\mathfrak{X}})^{\alpha} \leqslant G_{\mathfrak{X}}$, donde $(G_{\mathfrak{X}})^{\alpha} = G^{\alpha}$.
(c) Suponhamos que $S \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Temos que $S_{\mathfrak{X}} \trianglelefteq\trianglelefteq S \trianglelefteq\trianglelefteq G$, portanto $S_{\mathfrak{X}} \leqslant G$ e $S_{\mathfrak{X}} \leqslant S \cap G_{\mathfrak{X}}$. Para a outra desigualdade, como $S \cap G_{\mathfrak{X}} \trianglelefteq\trianglelefteq G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$, sai que $S \cap G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$. Ora, $S \cap G_{\mathfrak{X}} \trianglelefteq S$, donde $S \cap G_{\mathfrak{X}} \leqslant S_{\mathfrak{X}}$. □

Capítulo 2

Classes de Fitting e Injectores

2.1 Motivação Histórica

No que se segue faremos uma brevíssima introdução histórica à teoria de grupos, referindo resultados centrais que motivaram o estudo das classes de Fitting nas décadas de 60 e 70 do século XX. O primeiro resultado que aqui referimos é o teorema de Sylow (1872) que, em termos gerais, afirma que dado um grupo finito G, temos:

(a) existem p-subgrupos de Sylow;

(b) quaisquer dois p-subgrupos de Sylow são conjugados e portanto o conjunto dos p-subgrupos de Sylow forma classe de conjugação de G;

(c) dado um p-subgrupo de G, este está contido num p-subgrupo de Sylow de G.

P. Hall, em 1928, generaliza este resultado para grupos finitos e resolúveis, onde em vez de p-subgrupos de Sylow, encontramos π-subgrupos de Hall, em que $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Teríamos de esperar até 1961, ano em que Carter demonstra que dado um grupo G finito e resolúvel,

(a) existe $H \leqslant G$ tal que H é nilpotente e $H = N_G(H)$ (subgrupos como H, ficaram conhecidos como subgrupos de Carter);

(b) se $H, K \leqslant G$ forem nilpotentes e $H = N_G(H)$ e $K = N_G(K)$ então $H = K^g$, para algum $g \in G$.

Este importante resultado assemelha-se aos seus predecessores, na medida em que os subgrupos de Carter (para a classe dos grupos nilpotentes) podem ser vistos como análogos dos p-subgrupos de Sylow (para a classe dos p-grupos) e dos π-subgrupos de Hall (para a classe dos π-grupos). No entanto, não existe no teorema um análogo para a condição (c) do teoremas de Sylow e de Hall. E foi também imediatamente perceptível que o teorema de Carter não poderia ser facilmente generalizado para qualquer grupo finito. Pensando por exemplo em A_5, vemos que nem todos os grupos finitos possuem subgrupos de Carter e pensando em S_5 vemos que possuir uma única classe de conjugação de subgrupos de Carter não é uma característica única dos grupos resolúveis. Porém, o resultado de Carter permite perceber que posteriores extensões destes teoremas seriam possíveis. E não seria necessário muito tempo pois, em 1963, W. Gaschütz, no seu artigo *Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen* [21], apresenta novas generalizações das ideias acima apresentadas. Nesse trabalho Gaschütz constrói novas estruturas:

Definição 2.1.1 (Gaschütz)**.** Seja $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos. Dizemos que $\mathfrak{X}$ é uma *formação* se $\mathfrak{X}$ for fechada para quocientes e produtos subdirectos, ou seja, se $\mathfrak{X} = \mathrm{Q}\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{X} = \mathrm{R}_0\mathfrak{X}$.

Portanto, sai imediatamente da definição que uma classe de grupos $\mathfrak{X}$ é uma *formação saturada*, se $\mathfrak{X} = \langle \mathrm{Q}, \mathrm{R}_0, \mathrm{E}_\Phi \rangle\, \mathfrak{X}$.

Exemplos 2.1.1. As classes que se seguem são exemplos de formações saturadas.

A classe $\mathfrak{N}$ dos grupos finitos e nilpotentes;

Para cada $p \subseteq \mathbb{P}$, a classe $\mathfrak{S}_p$ dos p-grupos finitos e resolúveis;

Para cada $\pi \subseteq \mathbb{P}$, a classe $\mathfrak{S}_\pi$ dos π-grupos finitos e resolúveis.

Definição 2.1.2 (Gaschütz)**.** Seja $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos. Dado um grupo G, dizemos que $E \leqslant G$ é um $\mathfrak{X}$-*covering subgroup* de G se:

(a) $E \in \mathfrak{X}$;

(b) se $E \leqslant H \leqslant G$ e $N \trianglelefteq H$ com $H/N \in \mathfrak{X}$, então $H = EN$.

Com estas novas estruturas, Gaschütz provou que dada uma formação de grupos resolúveis, digamos $\mathfrak{X}$, então qualquer grupo resolúvel G tem um $\mathfrak{X}$-covering subgroup se e só se $\mathfrak{X}$ for saturada e neste caso os $\mathfrak{X}$-covering subgroups formam uma classe de conjugação de subgrupos de G. Este resultado permite-nos observar que Gaschütz via os subgrupos de Carter, os subgrupos de Sylow e os subgrupos de Hall como análogos e reparou que os covering subgroups partilhavam com estes algumas das suas propriedades. Aliás quando consideramos $\mathfrak{X}$ como sendo $\mathfrak{S}_p$, $\mathfrak{S}_\pi$, ou $\mathfrak{N}$ obtemos, respectivamente como $\mathfrak{X}$-covering subgroups os subgrupos de Sylow, os subgrupos de Hall e os subgrupos de Carter. Após o artigo de Gaschütz, que marca o início de um novo paradigma no estudo da teoria de grupos, vários trabalhos foram desenvolvidos em paralelo. Um desses trabalhos, que é fundamental para o desenvolvimento dos próximos capítulos, foi iniciado por B. Fischer [17], em 1966, durante o seu *Habilitationsschrift* (Habilitação). Nesse trabalho, Fischer tenta uma dualização da teoria das formações e dos $\mathfrak{X}$-covering subgroups, introduzidos por Gaschütz. Tal como observámos acima, Fischer também reparou que os operadores de fecho S_n e N_0 podiam ser vistos como duais dos operadores Q e R_0, respectivamente e tendo em conta essa ideia introduziu uma nova estrutura:

Definição 2.1.3 (Fischer [17])**.** Seja $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos. Dizemos que $\mathfrak{X}$ é uma *classe de Fitting* se $\mathfrak{X} = \langle \mathrm{S}_n, \mathrm{N}_0 \rangle \, \mathfrak{X}$.

Observação. Como já tínhamos notado, dada uma classe de grupos $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}$ é fechada para subgrupos subnormais (se $G \in \mathfrak{X}$ e $H \trianglelefteq\trianglelefteq G$, então $H \in \mathfrak{X}$) se e só se $\mathfrak{X}$ é fechada para subgrupos normais (se $G \in \mathfrak{X}$ e $H \trianglelefteq G$, então $H \in \mathfrak{X}$). No entanto, observamos que a normalidade não define um operador de fecho, visto a operação não ser transitiva e daí a idempotência não ser respeitada.

O próximo lema permite-nos provar uma proposição que nos dá uma caracterização do operador N_0 mais prática e que vai ser utilizada daqui em diante, sempre que quisermos verificar que uma classe é N_0-fechada.

Lema 2.1.1. *Seja $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos e G um grupo de ordem minimal em $N_0\mathfrak{X} \backslash \mathfrak{X}$. Então existem $N, M \trianglelefteq G$, com $N, M \in \mathfrak{X}$, tais que $G = NM$.*

Demonstração. Como $G \in \mathrm{N}_0\mathfrak{X}$, existem $S_1, \ldots, S_i \trianglelefteq\trianglelefteq G$, com $S_1, \ldots, S_i \in \mathfrak{X}$, tais que $G = \langle S_1, \ldots, S_i \rangle$. Podemos supor sem perda de generalidade que G não é gerado por nenhum subconjunto próprio de $\{S_1, \ldots, S_i\}$. Necessariamente $i > 1$, caso contrário, $G = K_1 \in \mathfrak{X}$. Ponhamos $H = \langle S_2, \ldots, S_i \rangle$ e $K = \langle S_1, \ldots, S_{i-1} \rangle$. Ora, $H, K \lneq G$ e $H, K \in \mathrm{N}_0\mathfrak{X}$, donde $H, K \in \mathfrak{X}$, pela minimalidade de G. Notemos $N = \left\langle H^G \right\rangle$ e $M = \left\langle K^G \right\rangle$. Pelo facto de N e M serem gerados por conjugados de H e K, vem que $N, M \in \mathrm{N}_0\mathfrak{X}$. Como $H, K \lneq G$, vem que $N, M \lneq G$ e portanto, novamente pela minimalidade de G, vem que $N, M \in \mathfrak{X}$. Concluímos que $G = \langle N, M \rangle = NM$, como queríamos. $\square$

Proposição 2.1.2. *Seja $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\mathfrak{X}$ é N_0-fechada;

(b) Dado um grupo G tal que $N, M \trianglelefteq NM = G$, com $N, M \in \mathfrak{X}$, então $G \in \mathfrak{X}$.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ Se $\mathrm{N}_0\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, a condição (b) sai imediatamente.
$(b) \Rightarrow (a)$ Suponhamos que a condição (b) se verifica e suponhamos com vista a um absurdo que $\mathrm{N}_0\mathfrak{X} \backslash \mathfrak{X} \neq \varnothing$. Tomemos $G \in \mathrm{N}_0\mathfrak{X} \backslash \mathfrak{X}$ de ordem minimal. Pelo lema anterior existem $N, M \in \mathfrak{X}$, tais que $N, M \trianglelefteq NM = G$. Por (b), viria que $G \in \mathfrak{X}$, uma contradição. □

Nota. Daqui em diante, no texto, reservamos o símbolo $\mathfrak{F}$ quando nos quisermos referir a uma classe de Fitting, em vez do símblo $\mathfrak{X}$, que utilizamos quando queríamos falar de uma classe de grupos em geral.

Exemplos 2.1.2. As classes que se seguem são exemplos de classes de Fitting.

A classe $\mathfrak{S}$ dos grupos finitos e resolúveis;

A classe $\mathfrak{N}$ dos grupos finitos e nilpotentes.[8]

Após construída a nova definição acima apresentada, Fischer precisava de uma estrutura que funcionasse como dual de um $\mathfrak{X}$-covering subgroup, por isso introduziu a seguinte

Definição 2.1.4 (Fischer [17])**.** Seja $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos. Dado um grupo G, dizemos que $E \leqslant G$ é um *Fischer $\mathfrak{X}$-subgroup* se:

(a) $E \in \mathfrak{X}$;

(b) se $E \leqslant H \leqslant G$, então $H_{\mathfrak{X}} \leqslant E$.

A partir desta construção, Fischer demonstrou que dada uma classe de Fitting $\mathfrak{F}$, para cada grupo finito e resolúvel G, existia um Fischer $\mathfrak{F}$-subgroup. Não conseguiu, no entanto, demonstrar que os Fischer $\mathfrak{F}$-subgroups de um grupo finito resolúvel eram conjugados. Para demonstrar esse facto teve que impor condições extra sobre a classe de Fitting $\mathfrak{F}$. Dark, em 1972, veio confirmar o que já se suspeitava, ou seja, que essas condições extra eram realmente necessárias, para isso exibindo uma classe de Fitting $\mathfrak{F}$ e um grupo finito resolúvel que tinha duas classes de conjugação de Fischer $\mathfrak{F}$-subgroups. Percebeu-se mais tarde que o conceito que se deveria dualizar era o conceito, que abaixo definimos, de $\mathfrak{X}$-projector, para uma dada classe de grupos $\mathfrak{X}$, em vez do conceito de $\mathfrak{X}$-covering subgroup.

[8] Parte desta afirmação é resultado do teorema de Fitting previamente apresentado. Certamente a designação classe de Fitting deve o seu nome a este resultado.

A classe de grupos que utilizou para verificar a propriedade de conjugação foi a seguinte:

Definição 2.1.5 (Fischer)**.** Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de grupos. Dizemos que $\mathfrak{F}$ é uma *classe de Fischer* se as seguintes condições se verificarem:

(a) $\mathfrak{F}$ é N_0-fechada;

(b) Se $K \trianglelefteq G \in \mathfrak{F}$ e H/K é um subgrupo nilpotente de G/K, então $H \in \mathfrak{F}$.

Observação. Se a classe de grupos $\mathfrak{F}$ da definição acima já for N_0-fechada, basta exigir que a condição (b) se verifique sempre que H/K é um p-subgrupo de G/K, para $p \in \mathbb{P}$.

De seguida apresentamos uma condição equivalente à condição (b) da definição anterior que nos vai ser útil mais adiante. Verificamos também que uma classe de Fischer é mais abrangente que uma classe de Fitting.

Proposição 2.1.3 (Hawkes)**.** *Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de grupos. E seja:*

$$\mathrm{S}_F\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{E} : G \leqslant H \in \mathfrak{F} \text{ e } G^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq\trianglelefteq H)$$

Então temos as seguintes propriedades:

(a) S_F é um operador de fecho;

(b) $S_n \lneqq S_F \lneqq S$;

(c) $\mathfrak{F}$ satisfaz a condição (b) da definição anterior se e só se $\mathfrak{F}$ é S_F-fechada.

Demonstração. (a) As propriedades de isotonia e extensividade são imediatas e, portanto $\mathrm{S}_F \leqslant \mathrm{S}_F^2$. Resta-nos apenas verificar que S_F é, de facto, idempotente. Seja $R \in \mathrm{S}_F(\mathrm{S}_F\mathfrak{F})$. Então existem grupos G e T tais que $R \leqslant T \leqslant G \in \mathfrak{F}$ e $R^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq\trianglelefteq T$, $T^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Ora, $R/(R \cap T^{\mathfrak{N}}) \simeq RT^{\mathfrak{N}}/T^{\mathfrak{N}} \leqslant T/T^{\mathfrak{N}}$. Daqui concluímos que $R^{\mathfrak{N}} \leqslant T^{\mathfrak{N}}$, mas como $R^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq\trianglelefteq T$, vem que $R^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq\trianglelefteq T^{\mathfrak{N}}$. Tínhamos que $T^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq\trianglelefteq G$ e portanto $R^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq\trianglelefteq G$, donde $R \in \mathrm{S}_F\mathfrak{F}$, como queríamos.
(b) As desigualdades $\mathrm{S}_N \leqslant \mathrm{S}_F \leqslant \mathrm{S}$ são óbvias das definições. Para verificar que as desigualdades são estritas, abaixo damos exemplos de classes que são S_F-fechadas e não são S-fechadas e de classes de Fitting que não são S_F-fechadas.
(c) Suponhamos que $\mathfrak{F}$ satisfaz a condição (b) da definição anterior e seja $H \in \mathrm{S}_F\mathfrak{F}$. Então, existe $G \in \mathfrak{F}$ tal que $H \leqslant G$ e $H^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq G$. Tomando a seguinte a série:

$$H^{\mathfrak{N}} = S_k \trianglelefteq S_{k-1} \trianglelefteq \dots S_1 = G, \; k \geqslant 2,$$

como sendo a série dos fechos normais, vemos facilmente por indução que esta é H-invariante (cada elemento da série é normalizado por H). Verificamos por indução que, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, $S_iH \in \mathfrak{F}$.
Se $i = 1$, é óbvio que $S_iH \in \mathfrak{F}$.
Suponhamos que $S_iH \in \mathfrak{F}$, para $i \geqslant 1$. Então $S_{i+1}H/S_{i+1} \simeq H/(H \cap S_{i+1})$, que por sua vez é isomorfo a um quociente do grupo $H/H^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{N}$. Logo, $S_{i+1}H/S_{i+1} \in \mathrm{Q}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$. Como $S_{i+1} \trianglelefteq S_iH \in \mathfrak{F}$, $S_{i+1}H \in \mathfrak{F}$, pela suposição que (b) da definição anterior se verifica. Logo $H = S_kH \in \mathfrak{F}$ e concluímos que $\mathrm{S}_F\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.
Para vermos a outra implicação, suponhamos que $\mathrm{S}_F\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ e tomemos $N \trianglelefteq G \in \mathfrak{F}$ de tal forma que H/K seja um subgrupo nilpotente de G/K. Então $H^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq K$ e portanto $H^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq\trianglelefteq G$, donde $H \in \mathrm{S}_F\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, como queríamos demonstrar. $\square$

Observação. Se $\mathfrak{F}$ for uma classe de grupos, resulta imediatamente da proposição anterior que $\mathfrak{F}$ é uma classe de Fischer se e só se $\mathfrak{F} = \langle \mathrm{N}_0, \mathrm{S}_F \rangle \mathfrak{F}$.

Exemplos 2.1.3. (a) A classe $\mathfrak{Z}^3 = (G \in \mathfrak{S} : \mathrm{Soc}_3(G) \leqslant Z(G))$ é uma classe de Fitting, no entanto, não é uma classe de Fischer;

(b) Seja $\pi \subseteq \mathbb{P}$, a classe $\mathfrak{J} = (G \in \mathfrak{S} : O_\pi(G) \leqslant Z_\infty)$ é uma classe de Fischer, que não é S-fechada.[9]

Antes de definirmos o conceito de $\mathfrak{X}$-projector precisamos da seguinte

Definição 2.1.6. Seja $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos e G um grupo. Dado $H \leqslant G$, dizemos que H é $\mathfrak{X}$-*maximal em* G se as seguintes condições se verificarem:

(a) $H \in \mathfrak{X}$;

(b) se $H \leqslant K \leqslant G$ e $K \in \mathfrak{X}$, então $H = K$.

Definição 2.1.7 (Gaschütz)**.** Sejam $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos e G um grupo. Dizemos que $H \leqslant G$ é um $\mathfrak{X}$-*projector de* G se, para qualquer $N \trianglelefteq G$, HN/N é $\mathfrak{X}$-maximal em G/N.

A dualização desta nova estrutura foi feita em 1967 por Fischer, Gaschütz e Hartley no famoso artigo, *Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen* [18]. A nova estrutura que obtiveram foram os injectores, estrutura essa que, por razões de clareza da exposição, definiremos mais à frente no texto. E é com esta nova construção e

[9] Para mais detalhes acerca destas construções, vide Doerk and Hawkes [15] IX.3.7 (a) e IX.3.7 (b), respectivamente.

nesse mesmo artigo que provam que uma classe de grupos finitos e resolúveis $\mathfrak{F}$ é uma classe de Fitting se e só se cada grupo finito e resolúvel possuir um $\mathfrak{F}$-injector. Além disso, nesse caso existe uma única classe de conjugação de $\mathfrak{F}$-injectores.

O nosso objectivo no que resta do capítulo e em capítulos posteriores será aprofundar o assunto que acima foi abreviadamente descrito, sempre do ponto de vista das classes de Fitting, objecto principal de estudo neste trabalho.

2.2 Produto de Fitting

O resultado apresentamos de seguida, ficou conhecido na literatura como "Lema quasi-R_0".
Embora as classes de Fitting não sejam fechadas para a operação R_0, este lema mostra que, sob certas condições podemos aproximar-nos dessa propriedade.

Proposição 2.2.1 (Lockett). *Sejam $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting, G um grupo e M, $N \trianglelefteq G$ tais que $M \cap N = 1$ e $G/MN \in \mathfrak{N}$. Se $G/M \in \mathfrak{F}$, temos:*

$$G \in \mathfrak{F} \text{ sse } G/N \in \mathfrak{F} .$$

Demonstração. Sejam $D = (G/N) \times (G/M)$ e $S = NM \trianglelefteq G$. Definamos o seguinte homomorfismo:

$$\begin{aligned} \mu: \quad G &\longrightarrow (G/N) \times (G/M) \\ g &\longmapsto (gN, gM) \end{aligned}$$

Por um lado, como $N \cap M = 1$, temos que μ é um monomorfismo. Por outro, dado que $\mu(S) = (S/N) \times (S/M) \trianglelefteq D$ e que $D/\mu(S) \simeq (G/S) \times (G/S) \in \mathfrak{N}$, vem que $\mu(G)/\mu(N) \trianglelefteq\trianglelefteq D/\mu(N)$. Consequentemente $\mu(G) \trianglelefteq\trianglelefteq D$. Ora, $D \in \mathrm{D}_0\mathfrak{F}$ e portanto $\mu(G) \in \mathrm{S}_n\mathrm{D}_0\mathfrak{F}$. Concluímos que $\mu(G) \in \mathfrak{F}$, como $G \simeq \mu(G)$, vem que $G \in \mathfrak{F}$.
Suponhamos agora que $G \in \mathfrak{F}$. Dados g_1, $g_2 \in G$, temos que $(g_1N, g_2M) = (g_1N, g_1M)(1N, g_1M)^{-1}(1N, g_2M)$, logo $A \times B = G_0B$. Como $G \in \mathfrak{F}$, $G_0 \in \mathfrak{F}$ e vem $G_0B \in \mathrm{N}_0\mathfrak{F}$. Sai que $A \times B \in \mathfrak{F}$, donde $A \in \mathfrak{F}$, ou seja, $G/N \in \mathfrak{F}$. □

Em geral, dadas duas classes de Fitting $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$, o seu produto $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$, como definido em 4.2, não tem necessariamente de ser uma classe de Fitting. No entanto, podemos construir um produto de classes de forma a manter esta propriedade.

Definição 2.2.1 (Gaschütz). Sejam $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ classes de Fitting. Definimos

$$\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G} = (G \in \mathfrak{S} : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{G}) \tag{2.1}$$

que designamos por *produto de Fitting de* $\mathfrak{F}$ *por* $\mathfrak{G}$.

Observações. Segue imediatamente das definições que, dadas $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ e $\mathfrak{H}$ classes de Fitting, $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{G}$ e que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$. Contudo, em geral não é verdade que $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$. É também óbvio que, se $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{H}$, então $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$, mas nem sempre $\mathfrak{G} \diamond \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \diamond \mathfrak{F}$.

Proposição 2.2.2. *Sejam* $\mathfrak{F}$*,* $\mathfrak{G}$ *e* $\mathfrak{H}$ *classes de Fitting. Então:*

(a) $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$ *é uma classe de Fitting;*

(b) dado G *um grupo,* $(G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{G}} = G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}}/G_{\mathfrak{F}}$*;*

(c) $(\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}) \diamond \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \diamond (\mathfrak{G} \diamond \mathfrak{H})$.

Demonstração. (a) Vejamos que $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$ é fechada para S_n: seja $N \trianglelefteq G \in \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$. Pela proposição 1.5.4 vem que $N_{\mathfrak{F}} = N \cap G_{\mathfrak{F}}$. Logo $N/N_{\mathfrak{F}} = N/(N \cap G_{\mathfrak{F}}) \simeq NG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{G}$. Portanto $N/N_{\mathfrak{F}} \in \mathrm{S}_n\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$, donde $N \in \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$
Vejamos que $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$ é fechada para N_0: seja $G = MN$, onde M, $N \trianglelefteq G$ e M, $N \in \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$. Temos novamente, como acima $M_{\mathfrak{F}} = M \cap G_{\mathfrak{F}}$ e $M/M_{\mathfrak{F}} = M/(M \cap G_{\mathfrak{F}}) \simeq MG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}}$, pelo teorema do isomorfismo. Analogamente, $N/N_{\mathfrak{F}} \simeq NG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}}$. Usando estas duas observações e o facto de $G/G_{\mathfrak{F}} = (MG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}})(NG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}})$, concluímos que $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathrm{S}_n\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ e portanto
$G \in \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$;
(b) Temos que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$, logo $G_{\mathfrak{F}} \leqslant G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}}$. Portanto $G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \cap G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}}$ e pela proposição 1.5.4 temos que $G_{\mathfrak{F}} \cap G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}} = (G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}})_{\mathfrak{G}}$. Concluimos que $G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}}/G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}}/(G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}})_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{G}$. Donde $G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}}/G_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}}/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{G}} \leqslant (G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{G}}$. Por outro lado, notemos $R/G_{\mathfrak{F}} = (G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{G}}$. Utilizando novamente a proposição 1.5.4, $R_{\mathfrak{F}} = R \cap G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}$. Logo $R/R_{\mathfrak{F}} = R/G_{\mathfrak{F}} = (G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{G}$ e portanto $R \in \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$. A seguinte cadeia de igualdades, $R/R_{\mathfrak{F}} = R_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}}/R_{\mathfrak{F}} = R_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}}/G_{\mathfrak{F}}$ implica que $(G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{G}}$ está contido em $G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}}/G_{\mathfrak{F}}$. Portanto temos a igualdade, $(G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{G}} = G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}}/G_{\mathfrak{F}}$;
(c) A cadeia de equivalências a seguir exibida demonstra o pretendido. Temos $G \in (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}) \diamond \mathfrak{H}$ sse (por definição) $G/G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}} \in \mathfrak{H}$ sse (teorema do isomorfismo) $(G/G_{\mathfrak{F}})/(G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}}/G_{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{H}$ sse (alínea (b)) $(G/G_{\mathfrak{F}})/(G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{H}$ sse (por definição) $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{G} \diamond \mathfrak{H}$ sse (por definição) $G \in \mathfrak{F} \diamond (\mathfrak{G} \diamond \mathfrak{H})$. □

Teorema 2.2.3 (Lockett)**.** *Sejam* $\mathfrak{F}$ *e* $\mathfrak{G}$ *classes de Fischer. Então* $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$ *ainda é uma classe de Fischer.*

Demonstração. Se $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ forem classes de Fischer, então são classes de Fitting e portanto pelo teorema anterior vem que $\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}$ é uma classe de Fitting. Relembrando

a observação feita a seguir à definição 1.5.4, tomemos $N \trianglelefteq G \in \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$ de tal forma que H/N é um p-subgrupo de G/N. Queremos então verificar que $H \in \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$. Ora, $HG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}} \leqslant G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{G}$ e o quociente de $HG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}}$ por $NG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}}$ é isomorfo a $HG_{\mathfrak{F}}/NG_{\mathfrak{F}}$, que é um p-grupo. Portanto $(HG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq NG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq G/G_{\mathfrak{F}}$ e concluímos que $(HG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq\trianglelefteq G/G_{\mathfrak{F}}$, donde $HG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}} \in \mathrm{S}_F\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$. Consequentemente (1) $H/(H \cap G_{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{G}$.
Por outro lado temos que, $N \cap G_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq H \cap G_{\mathfrak{F}}$ e $N \cap G_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Como $(H \cap G_{\mathfrak{F}})/(N \cap G_{\mathfrak{F}})$ é um p-grupo concluímos que $H \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathrm{S}_F\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Mas $H \cap G_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq H$, donde $H \cap G_{\mathfrak{F}} \leqslant H_{\mathfrak{F}}$. Ora, utilizando a lei modular de Dedekind temos, (2) $H_{\mathfrak{F}} \cap (H \cap G_{\mathfrak{F}})N = (H \cap G_{\mathfrak{F}})(H_{\mathfrak{F}} \cap N) = (H \cap G_{\mathfrak{F}})N_{\mathfrak{F}} = H \cap G_{\mathfrak{F}}$.
Como $H/(H \cap G_{\mathfrak{F}})N$ é um p-grupo e um quociente de $H/(H \cap G_{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{G}$, temos que $p \in char(\mathfrak{G})$ e portanto (3) $H/(H \cap G_{\mathfrak{F}})N \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{G}$. Por (1), (2) e (3), à luz do lema quasi-R_0, podemos concluir que $H/H_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{G}$, donde $H \in \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$, como queríamos. □

2.3 Classes de Fitting e Injectores

Tendo presente o objectivo a que nos propusemos neste capítulo, da dualização da teoria dos projectores iniciada por Gaschütz, introduzimos a seguinte

Definição 2.3.1 (Fischer, Gaschütz, Hartley)**.** Seja $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos e G um grupo. Dado $V \leqslant G$, dizemos que V é um $\mathfrak{X}$-*injector* de G, se para cada $S \trianglelefteq\trianglelefteq G$, $V \cap S$ for $\mathfrak{X}$-maximal em S.

Observações. Resulta imediatamente da definição que, dada $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos e G_1 e G_2 grupos:

(a) Se V é um $\mathfrak{X}$-injector de G_1 e $S \trianglelefteq\trianglelefteq G_1$ então $V \cap S$ é um $\mathfrak{X}$-injector de S;

(b) Se V é um $\mathfrak{X}$-injector de G_1 e $\alpha : G_1 \to G_2$ é um isomorfismo então $\alpha(V)$ é um $\mathfrak{X}$-injector de G_2.

Notação. Sejam $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos e G um grupo. Denotamos o conjunto dos $\mathfrak{X}$-injectores de G (possivelmente vazio) por $\mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G)$.

Definição 2.3.2. Seja $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos. Dizemos que $\mathfrak{X}$ é uma *classe injectiva* se, dado um grupo finito e resolúvel G, este possuir $\mathfrak{X}$-injectores.

Exemplos 2.3.1. Dado $\pi \subseteq \mathbb{P}$, a classe $\mathfrak{S}_\pi$ dos π-grupos resolúveis é injectiva. Dado um grupo resolúvel, os seus $\mathfrak{S}_\pi$-injectores são os seus π-subgrupos de Hall.

As proposições que se seguem são importantes para o estudo dos injectores e caracterização das classes injectivas. São também de fácil demontração, portanto as suas provas serão omitidas.

Proposição 2.3.1. *Seja G um grupo finito, $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos. Então V é um $\mathfrak{X}$-injector de G se e só se as seguintes afirmações forem satisfeitas:*

(a) V é $\mathfrak{X}$-maximal em G;

(b) para cada $N \trianglelefteq\cdot\, G$, $N \cap V$ é $\mathfrak{X}$-injector de N.

Observações. (a) Sejam G um grupo e $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos. Um $\mathfrak{X}$-injector de G contém o radical $G_{\mathfrak{X}}$.

(b) Resulta da definição que um $\mathfrak{X}$-injector de G é um subgrupo $\mathfrak{X}$-maximal de G. No entanto, um subgrupo $\mathfrak{X}$-maximal de G não tem necessariamente de ser um $\mathfrak{X}$-injector de G. Se pensarmos no grupo simétrico $G = S_3$, este admite como subgrupos: o subgrupo trivial $L = \{id_G\}$, $H_1 = \langle(1,2)\rangle$, $H_2 = \langle(2,3)\rangle$, $H_3 = \langle(1,3)\rangle$, $K = \langle(1,2,3)\rangle = A_3$ e o próprio G. Como $Z(G) = 1$, G não é nilpotente. H_1, H_2 e H_3 são nilpotentes e portanto $\mathfrak{N}$-maximais, porém não são $\mathfrak{N}$-injectores de G pois a sua interseção com $K = A_3$ é trivial e K é nilpotente e normal em G.

Proposição 2.3.2. *Seja $\mathfrak{X}$ uma classe injectiva. Dado G um grupo finito e resolúvel, temos:*

$$G \in \mathfrak{X} \text{ sse } G \text{ é } \mathfrak{X}\text{-injector de } G.$$

Desde o lema que se segue e até ao final deste capítulo, todas as classes consideradas estão contidas na classe $\mathfrak{S}$, dos grupos finitos e resolúveis. Da mesma forma todos os grupos considerados são finitos e resolúveis.

Lema 2.3.3. *Seja $\mathfrak{X}$ uma classe injectiva. Então:*

(a) $\mathfrak{X}$ é S_n-fechada;

(b) $\mathfrak{X}$ é N_0-fechada.

Demonstração. (a) Seja $G \in \mathfrak{X}$ um grupo e $S \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Como $G \in \mathfrak{X}$, pela proposição 2.3.2 vem que G é $\mathfrak{X}$-injector de G. Portanto, por definição vem que $G \cap S$ é $\mathfrak{X}$-maximal em S, mas $G \cap S = S$ e concluímos que $S \in \mathfrak{X}$, como queríamos.

(b) Sejam H_1, $H_2 \in \mathfrak{X}$ tais que H_1, $H_2 \trianglelefteq\ H_1H_2 = G$. Como $\mathfrak{X}$ é injectiva e G é resolúvel, G possui um $\mathfrak{X}$ injector, digamos V. Logo temos que $H_1 \cap V = H_1$ e $H_2 \cap V = H_2$, que implica H_1, $H_2 \leqslant V$, donde $G \leqslant V$. Concluímos que $V = G$ e portanto $G \in \mathfrak{X}$. $\square$

Lema 2.3.4 (Hartley). *Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting e G/H um factor abeliano do grupo G. Se S_1 e S_2 forem subgrupos $\mathfrak{F}$-maximais de G tais que $H \cap S_1 = H \cap S_2$, então S_1 e S_2 são conjugados em G.*

Demonstração. Seja $G_0 = \langle S_1, S_2\rangle$ e suponhamos que $G_0 \lneqq G$. Seja também $H_0 = G_0 \cap H$. Temos trivialmente que G_0/H_0 é um factor abeliano de G_0, S_1 e S_2 são $\mathfrak{F}$-maximais em G_0 e $H_0 \cap S_1 = H_0 \cap S_2$. Portanto, por indução temos que S_1 e S_2 são conjugados em G_0. Podemos agora supor que $G = \langle S_1, S_2\rangle$. Ponhamos $S = H \cap S_1 = H \cap S_2$. Como $S \trianglelefteq S_1$ e $S \trianglelefteq S_2$, temos que $S \trianglelefteq G = \langle S_1, S_2\rangle$. Para cada $i \in \{1, 2\}$, seja C_i/S um subgrupo de Carter $N_G(S_i)/S$. Mostramos em dois passos que $S_i \leqslant C_i$:
(i) Vejamos que S_i/S é central em $N_G(S_i)/S$: Seja $s_i \in S_i$. Então, para cada $g \in G$, $s_i^g s_i^{-1} = [g, s_i^{-1}] \in G' \leqslant H$, pois G/H é abeliano. Em particular, se $g \in N_G(S_i), [g, s_i^{-1}] \in H$. Para cada cada $g \in N_G(S_i)$, $[g, s_i^{-1}] = s_i^g s_i^{-1} \in S_i$ e concluímos que $[g, s_i^{-1}] \in H \cap S_i = S$. Logo S_i/S é central em $N_G(S_i)/S$. [10]
(ii) C_i/S é um subgrupo de Carter $N_G(S_i)/S$ e como tal C_i/S é o seu próprio normalizador em $N_G(S_i)/S$. Portanto C_i/S contém todos os elementos centrais em $N_G(S_i)/S$ e concluímos que $S_i/S \trianglelefteq C_i/S$, por (i).
Vejamos que para cada $i \in \{1, 2\}$, C_i/S é um subgrupo de Carter de G/S: Por construção C_i/S é nilpotente. Resta-nos ver que $C_i = N_G(C_i)$. Seja $g \in G$ tal que $C_i^g = C_i$. Sai que $S_i, S_i^g \trianglelefteq C_i$. Temos por hipótese que $S_i \in \mathfrak{F}$, como $S_i^g \simeq S_i$, vem que $S_i^g \in \mathfrak{F}$. A classe $\mathfrak{F}$ é fechada para produtos normais, logo $S_iS_i^g \in \mathfrak{F}$. Temos também por hipótese que S_i é $\mathfrak{F}$-maximal em G, logo $S_i = S_iS_i^g$ e $S_i = S_i^g$. Daqui concluímos que $g \in N_G(S_i)$ e vem que $g \in C_i$, pois C_i é o seu próprio normalizador em $N_G(S_i)$.
Sendo subgrupos de Carter de G/S, C_1/S e C_2/S são conjugados. Portanto $C_1 = C_2^g$, para algum $g \in G$. Então S_1, $S_2^g \trianglelefteq C_1$ e usando um raciocínio análogo ao acima utilizado (S_1 e S_2 $\mathfrak{F}$-maximais em G e $\mathfrak{F}$ fechada para produtos normais) vem que $S_1 = S_2^g$ como queríamos. $\square$

O teorema que se segue é o resultado central deste capítulo. Os dois lemas que o precederam são importantes para a sua demonstração. Recorde-se que as classes e grupos tomados estão no universo $\mathfrak{S}$.

[10] Se A, $B \trianglelefteq G$ forem tais que $B \leqslant A$, temos que $[A, G] \leqslant B$ sse $A/B \leqslant Z(G/B)$.

Teorema 2.3.5 (Fischer, Gaschütz, Hartley)**.** *Seja $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos. Então:*

(a) $\mathfrak{X}$ é uma classe de Fitting sse $\mathfrak{X}$ é uma classe injectiva;

(b) Se $\mathfrak{X}$ é uma classe injectiva e G for um grupo então todos os $\mathfrak{X}$-injectores de G são conjugados.

Demonstração. Seja $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos. Se $\mathfrak{X}$ for injectiva pelo lema 2.3.3 temos que $\mathfrak{X}$ é uma classe de Fitting.
Suponhamos que $\mathfrak{X}$ é uma classe de Fitting. Seja G um grupo (finito e resolúvel). Vejamos, por indução, que G admite uma única classe de conjugação de $\mathfrak{X}$-injectores. Isto prova a implicação pretendida e também (b).
Se G tiver ordem 1, o resultado sai imediatamente.
Suponhamos então que $|G| \neq 1$ e seja M um subgrupo normal próprio de G ($M \lhd G$), com quociente G/M abeliano. Por indução, existe um $\mathfrak{X}$-injector de M, digamos S_0 (logo, $S_0 \leqslant M$). Seja S um subgrupo $\mathfrak{X}$-maximal de G contendo S_0. Temos que $S_0 \leqslant S \cap M$ e S_0 é $\mathfrak{X}$-maximal em M, donde $S_0 = S \cap M$. Vejamos que S é um $\mathfrak{X}$-injector de G:
Por construção S é $\mathfrak{X}$-maximal em G. Pela proposição 2.3.1 resta-nos ver que, para cada $N \trianglelefteq\cdot\, G$, $N \cap S$ é $\mathfrak{X}$-injector de N. Seja N um subgrupo maximal normal de G ($N \trianglelefteq\cdot\, G$), novamente por indução temos que existe um $\mathfrak{X}$-injector de N, digamos, V_0. Como acima, podemos tomar um subgrupo V $\mathfrak{X}$-maximal em G, contendo V_0 e temos outra vez que $V \cap N = V_0$.
De $M \cap S = S_0$, vem que $M \cap N \cap S = M \cap N \cap S_0$. Portanto, como $M \cap N \trianglelefteq M$ e S_0 é $\mathfrak{X}$-injector de M sai que $M \cap N \cap S_0$ é um $\mathfrak{X}$-injector de $M \cap N$. Pela igualdade acima temos que $M \cap N \cap S$ é $\mathfrak{X}$-injector de $M \cap N$. Da mesma forma, $M \cap N \cap V$ é um $\mathfrak{X}$-injector de $M \cap N$. Por indução, existe $g \in G$ tal que $M \cap N \cap V = (M \cap N \cap S)^g = M \cap N \cap S^g$. Como G/M e G/N são abelianos, $G/(M \cap N)$ também o é e pelo lema 2.3.4, usando o facto de $M \cap N \cap V = M \cap N \cap S^g$ e de V e S^g serem $\mathfrak{X}$-maximais em G, vem que V e S^g são conjugados em G. Logo, existe $h \in G$ tal que $S^h = V$. Agora, $(N \cap S)^h = N \cap S^h = N \cap V = V_0$. Como V_0 é um $\mathfrak{X}$-injector de N, sai que $(N \cap S)^h$ é um $\mathfrak{X}$-injector de N e portanto $N \cap S$ também o é, como queríamos.
Suponhamos que S_1 e S_2 são $\mathfrak{X}$-injectores de G. Vejamos que S_1 e S_2 são conjugados: seja $N \trianglelefteq\cdot\, G$, então $N \cap S_1$ e $N \cap S_2$ são $\mathfrak{X}$-injectores de N e por indução são conjugados em N. Portanto, existe $n \in N$ tal que
$N \cap S_1 = (N \cap S_2)^n$, donde $N \cap S_1 = N \cap S_2^n$. Pelo lema 2.3.4, como S_1 e S_2^n são $\mathfrak{X}$-maximais em G e G/N é abeliano, concluímos que S_1 e S_2^n são conjugados e portanto S_1 e S_2 também o são, como queríamos. $\square$

Após este resultado ter sido demonstrado, pensando numa definição mais geral de injector para o caso dos grupos finitos, conjecturou-se que o teorema ainda

seria válido para este caso. No entanto, conforme uma construção apresentada por Salomon, que nunca foi publicada, mas que pode ser vista no capítulo 7 de Ballester-Bolinches and Ezquerro [1], fora do universo resolúvel pode construir-se uma classe de Fitting não injectiva .
Da demonstração que acabámos de exibir resulta imediatamente o seguinte

Corolário. *Seja* $\mathfrak{X}$ *uma classe de Fitting. Se* $H \trianglelefteq G$ *é tal que* G/H *é abeliano,* V *é* $\mathfrak{X}$*-maximal em* G *e* $V \cap H$ *é* $\mathfrak{X}$*-injector de* H*, então* V *é* $\mathfrak{X}$*-injector de* G*.*

Corolário. *Seja* $\mathfrak{X}$ *uma classe de Fitting e* $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$ *uma série subnormal de* G*, com* G_{i+1}/G_i *abeliano, para cada* $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$*. Tome-se também* $V \leqslant G$*. Então* V *é um* $\mathfrak{X}$*-injector de* G *sse* $G_i \cap V$ *é* $\mathfrak{X}$*-maximal em* G_i*, qualquer que seja* $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$*.*

Demonstração. Condição necessária: resulta da definição.
Condição suficiente: Procedemos por indução. Se $n = 0$, sai imediatamente. Suponhamos que $n \neq 0$. Por hipótese de indução temos que $V \cap G_{n-1}$ é um $\mathfrak{X}$-injector de G_{n-1}. Por hipótese $V \cap G_n = V$ é $\mathfrak{X}$-maximal em G_n. Pelo corolário anterior sai que V é $\mathfrak{X}$-injector de $G_n = G$, como queríamos. □

Teorema 2.3.6. *Seja* $\mathfrak{X}$ *uma classe de Fitting,* G *um grupo e* V *um* $\mathfrak{X}$*-injector de* G*. Se* $V \leqslant S \leqslant G$ *então* V *é um* $\mathfrak{X}$*-injector de* S*.*

Demonstração. Seja $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$ uma série subnormal de G, com G_{i+1}/G_i abeliano, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Notemos $S_i = S \cap G_i$, qualquer que seja $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por um dos teoremas do isomorfismo, S_{i+1}/S_i é isomorfo a um subgrupo do grupo quociente G_{i+1}/G_i e portanto abeliano. V é um $\mathfrak{X}$-injector de G, portanto, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $V \cap G_i$ é um $\mathfrak{X}$-injector de G_i. Pelo facto de $V \cap S_i = V \cap (S \cap G_i) = V \cap G_i$, vem que $V \cap S_i$ é $\mathfrak{X}$-maximal em G_i e portanto em S_i. Como $1 = S_0 \trianglelefteq S_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq S_n = S$ é uma série subnormal de S, com S_{i+1}/S_i abeliano, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, concluímos pelo corolário anterior que V é um $\mathfrak{X}$-injector de S, como queríamos. □

De seguida deduzimos um corolário deste teorema que nos será útil mais adiante.

Corolário. *Seja* $\mathfrak{F}$ *uma classe de Fitting e* G *um grupo. Se* V *é um* $\mathfrak{F}$*-injector de* G*, então* V *é pronormal em* G*.*

Demonstração. Seja V um $\mathfrak{F}$-injector de G e tomemos $g \in G$, arbitrário. Então V^g é um $\mathfrak{F}$-injector de G. Pelo teorema anterior V e V^g são $\mathfrak{F}$-injectores de $\langle V, V^g \rangle$ e pelo teorema 2.3.5, V e V^g são conjugados em $\langle V, V^g \rangle$, como queríamos. □

Abaixo $\mathfrak{N}$ denota, como habitualmente, a classe dos grupos finitos e nilpotentes.

Lema 2.3.7. *Seja G um grupo. Então $C_G(G_{\mathfrak{N}}) \leqslant G_{\mathfrak{N}}$.*

Demonstração. Notemos $F = G_{\mathfrak{N}} = F(G)$ e $C = C_G(F(G))$. Como $F \trianglelefteq G$, $C \trianglelefteq G$ e portanto $D = C \cap F \trianglelefteq G$. Suponhamos com vista a um absurdo que $C \nleqslant F$. Então $D < C$. Tomemos $D < N \leqslant C$, tal que $N/D \cdot\!\!\trianglelefteq G/D$. Ora, G é resolúvel e portanto G/D é resolúvel, o que implica que N/D é abeliano. Como N centraliza F, vem que $[N, D] = 1$ e concluímos que $N > D \geqslant 1$ é série central de N. Logo N é nilpotente e normal em G e sai que $N \leqslant F$, o que é absurdo. Portanto $C \leqslant F$, como queríamos. □

Tendo presente a proposição 2.3.2, o próximo resultado mostra que dado um grupo G (finito e resolúvel), os $\mathfrak{N}$-injectores de G são precisamente os *Fischer subgroups* de G.

Teorema 2.3.8 (Fischer). *Seja G um grupo. Considere-se $\mathfrak{N}$ a classe dos grupos finitos e nilpotentes. Então V é um $\mathfrak{N}$-injector de G sse V é $\mathfrak{N}$-maximal em G e $G_{\mathfrak{N}} \leqslant V$.*

Demonstração. Se V é um $\mathfrak{N}$-injector de G, sai por definição que V é $\mathfrak{N}$-maximal em G. Como $G_{\mathfrak{N}} \trianglelefteq G$, concluímos que $G_{\mathfrak{X}} \leqslant V$.
A demonstração do outro sentido é feita por indução na ordem de G.
Se $|G| = 1$ a implicação sai imediatamente.
Vejamos que para cada cada $N \trianglelefteq\!\cdot\, G$, (i) $N_{\mathfrak{N}} \leqslant V \cap N$ e (ii) $V \cap N$ é $\mathfrak{N}$-maximal em N.
(i) $N_{\mathfrak{N}} \leqslant V \cap N$: Como $N_{\mathfrak{N}} \trianglelefteq N$, apenas nos resta verificar que $N_{\mathfrak{N}} \leqslant V$. Ora, $N_{\mathfrak{N}}$ *car* $N \trianglelefteq G$ e portanto $N_{\mathfrak{N}} \trianglelefteq G$. Concluímos que $N_{\mathfrak{N}} \leqslant G_{\mathfrak{N}}$. Por hipótese $G_{\mathfrak{N}} \leqslant V$, logo $N_{\mathfrak{N}} \leqslant V$, como queríamos.
Antes de procedermos à verficação de (ii), procedemos a algumas abreviaturas para simplificar a notação e fazemos uma observação. Ponhamos $F = N_{\mathfrak{N}}$ e $D = V \cap N$. Dado um grupo H, H_p denotará um p-subgrupo de Sylow de H e $H_{p'}$ denotará um p'-subgrupo de Hall de H. É bem conhecido que se H é nilpotente, então $H = H_p \times H_{p'}$. Portanto $H_p \leqslant C_H(H_{p'})$ e $H_{p'} \leqslant C_H(H_p)$.
(ii) D é $\mathfrak{N}$-maximal em N: Seja T um grupo nilpotente tal que $D \leqslant T \leqslant N$. Queremos ver que $D = T$. Seja $p \in \mathbb{P}$. Então $V_{p'} \leqslant C_G(V_p) \leqslant C_G(F_p)$, pois $F \leqslant$

$G_{\mathfrak{N}} \leqslant V$ e portanto $F_p \leqslant V_p$. Logo $F_pV_{p'}$ está definido e é nilpotente. Para além disso temos também: $V_p \leqslant C_G(V_{p'}) \leqslant C_G(F_{p'})$, pois $F_{p'} \leqslant V_{p'}$ e $T_p \leqslant C_G(T_{p'}) \leqslant C_G(F_{p'})$, pois $F_{p'} \leqslant T_{p'}$. Seja $C_G(F_{p'})_p$ um p-subgrupo de Sylow de $C_G(F_{p'})$ tal que $V_p \leqslant C_G(F_{p'})_p$. Pelo teorema de Sylow, existe $g \in G$ tal que $T_p^g \leqslant C_G(F_{p'})_p$. Ponhamos $Q = \langle T_p^g, V_p \rangle$. Então $Q \leqslant C_G(F_{p'})_p$ e portanto é nilpotente, pois é um p-grupo. O grupo $F_{p'}Q$ é também nilpotente. Agora, $[V_{p'}, Q] \leqslant [C_G(F_p), C_G(F_{p'})] \leqslant C_G(F_p) \cap C_G(F_{p'}) = C_G(F)$[11] e $[V_{p'}, Q] \leqslant [N, Q] \leqslant N$. Portanto $[V_{p'}, Q] \leqslant C_N(F) \leqslant F$, a última das desigualdades pelo lema 2.3.7. Logo $[F_pV_{p'}, F_{p'}Q] \leqslant F$. Seja $K = F_pV_{p'}F_{p'}Q$. Como $F = F_pF_{p'}$, temos que $F \leqslant F_pV_{p'}$ e $F \leqslant F_{p'}Q$, donde $F \leqslant F_pV_{p'} \cap F_{p'}Q$. Segue que $F_pV_{p'}$ e $F_{p'}Q$ são subgrupos normais de K. Como são também nilpotentes, temos que K é nilpotente. Mas $V = V_pV_{p'} \leqslant V_{p'}Q \leqslant K \leqslant G$ e portanto, pela $\mathfrak{N}$-maximalidade de V em G, sai que $V = K$. Então como $T_p^g \leqslant Q \leqslant K = V$, sai que $T_p^g \leqslant V \cap N$. Como isto é válido para cada primo p, concluímos que $|T| \leqslant |V \cap N|$. Portanto, como $V \cap N = D \leqslant T$, vem que $D = T$. Como verificámos (i) e (ii), por hipótese de indução sai que $V \cap N$ é $\mathfrak{N}$-injector de N. Pela proposição 2.3.1 sai que V é $\mathfrak{N}$-injector de G.

[11] Seja G um grupo finito, se $A, B \trianglelefteq G$ então $[A, B] \trianglelefteq G$ e $[A, B] \leqslant A \cap B$ (Huppert).

Capítulo 3

A Secção de Lockett

Neste capítulo seguimos essencialmente a abordagem feita por K. Doerk e T. Hawkes em [15].
Atente-se no seguinte: inicialmente as classes de Fitting e grupos considerados estão no universo $\mathfrak{S}$, dos grupos finitos e resolúveis. A partir da definição 3.2.1 o universo onde trabalhamos é $\mathfrak{E}$, dos grupos finitos. Mais tarde, referindo-o, regressaremos novamente ao universo $\mathfrak{S}$.
Em 1978, K. Doerk e T. Hawkes mostraram que se $\mathfrak{X}$ é uma formação e G e H forem grupos finitos e resolúveis então $(G \times H)^{\mathfrak{X}} = G^{\mathfrak{X}} \times H^{\mathfrak{X}}$. Uma questão que já tinha sido posta e respondida muito antes deste resultado, era a de saber se este teorema era verdadeiro no caso dual, para os radicais. Ou seja, se dada uma classe de Fitting $\mathfrak{F}$ e grupos finitos G e H, será que $(G \times H)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \times H_{\mathfrak{F}}$?
Em geral a resposta a esta pergunta é negativa, como mostraram Blessenohl e Gaschütz em [5], mesmo para o caso em que G e H são resolúveis.
O estudo apresentado neste capítulo advém deste comportamento algo errático dos radicais relativamente ao produto directo. Dada uma classe de Fitting $\mathfrak{F}$ e um grupo finito G, apesar de nem sempre termos a igualdade, temos a seguinte inclusão:

$$(G_{\mathfrak{F}} \times G_{\mathfrak{F}}) < (G \times G)_{\mathfrak{F}};$$

Este comportamento motivou o estudo iniciado por Lockett em 1974, no seu artigo *The Fitting class* $\mathfrak{F}^*$ [34]. Aqui Lockett apresenta uma construção que a cada classe de Fitting $\mathfrak{F}$, associa uma nova classe de Fitting , $\mathfrak{F}^*$, que contém $\mathfrak{F}$ e que respeita a igualdade $(G_{\mathfrak{F}^*} \times G_{\mathfrak{F}^*}) = (G \times G)_{\mathfrak{F}^*}$. Devido a este trabalho, as classes de Fitting $\mathfrak{F}$, tais que $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$, ficaram conhecidas como classes de Lockett.
Introduzidos estes conceitos, apresentamos também o estudo da classe $\mathfrak{F}_*$, que definimos com sendo a menor classe, entre as classes de Fitting $\mathfrak{G}$ tais que $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{F}^*$.

3.1 Exemplo apresentado por Blessenohl e Gaschütz

Antes de começarmos um estudo mais detalhado, baseado nas investigações de Lockett, apresentamos então um exemplo desta "anomalia", exemplo esse que foi a resposta que Blessenohl e Gaschütz deram à questão acima posta. Com esse objectivo, apresentamos novas estruturas cujo estudo irá ser concluído no final desta secção. Tal como acima referido, as classes e grupos tomados nesta secção, estão no universo $\mathfrak{S}$.

Definição 3.1.1. Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting. Dizemos que $\mathfrak{F}$ é uma *classe de Fitting normal*, se para cada grupo G finito, os seus $\mathfrak{F}$-injectores forem normais em G.

Observação. Se $\mathfrak{F}$ é uma classe de Fitting normal, então cada grupo finito, G, admite apenas um $\mathfrak{F}$-injector, que é o seu $\mathfrak{F}$-radical, $G_{\mathfrak{F}}$.

No lema seguinte, na sua respectiva demonstração e na proposição que se lhe segue, com o intuito de não sobrecarregar o texto, usamos a expressão "H é par em Q", para significar que os elementos de H actuam como permutações pares nos elementos de Q e da mesma forma para os casos em que os intervenientes não sejam H e Q.

Lema 3.1.1. *Seja Q um grupo de ordem ímpar, $R \leqslant Q$ e $H \leqslant \mathrm{Aut}(Q)$ tal que H estabiliza cada classe lateral à direita de R em Q.*[12] *Então H é par em Q sse H é par em R.*

Demonstração. Sejam $\{q_1, \ldots, q_t\} \subseteq Q$ um conjunto de representantes das classes laterais direitas de R em Q (repare-se que t é ímpar), ou seja:

$$Q = Rq_1 \,\dot\cup\, Rq_2 \,\dot\cup \ldots \dot\cup\, Rq_t.$$

Para cada $h \in H$ definam-se as seguintes permutações:
h_i^*, $h_i^{**} : Rq_i \to Rq_i$, por $(rq_i)h_i^* = (r)hq_i$ e $(rq_i)h_i^{**} = r(q_i)h$. Então, dados $r \in R$ e $q_i \in Q$, $(rq_i)h_i^* h_i^{**} = (r)h(q_i)h = (rq_i)h$. Portanto, como permutações em Rq_i, $h = h_i^* h_i^{**}$. Claramente, h é par em R sse h_i^* é par em Rq_i. Temos que $(q_i)h \in Rq_i$, logo existe $r' \in R$ tal que $(q_i)h = r'q_i$. Como $|R|$ é ímpar, existe $n \in \mathbb{N}$ ímpar tal que $(r')^n = 1$. Para este n, $(rq_i)(h_i^{**})^n = r(r')^n q_i = rq_i$, donde concluímos que h_i^{**} induz uma permutação em Rq_i de ordem que divide n, portanto tem ordem ímpar e concluímos que h_i^{**} é uma permutação par. Em conclusão, se h é par em R então

[12] $\forall h \in H, \forall q \in Q, (Rq)h = Rq$

h é par em Q. Por outro lado, se h é ímpar em R, como já reparámos acima, vem que h_i^* é ímpar em cada Rq_i e portanto h é ímpar em cada Rq_i. Como $|Q/R|$ é ímpar vem que h é impar em Q, como queríamos. $\square$

Proposição 3.1.2. $\mathfrak{I} = \{G \in \mathfrak{S} : \mathrm{Inn}(G)$ *é par em* $O_{2'}(G)\}$ *é uma classe de Fitting.*

Demonstração. Vejamos que $\mathfrak{I}$ é fechada para subgrupos normais: seja $G \in \mathfrak{I}$ e ponhamos $Q = O_{2'}(G)$. Tomemos $H \trianglelefteq G$ e notemos $R = O_{2'}(H)$. Como $\mathrm{Inn}(G)$ é par em Q, é imediato que $\mathrm{Inn}(H)$ também é par em Q. Temos que $Q, H \trianglelefteq G$ e portanto $[Q, H] \leqslant Q \cap H$. Claramente, $Q \cap H = R$, logo $[Q, H] \leqslant R$ e então H centraliza Q/R e portanto $\mathrm{Inn}(H)$ centraliza Q/R, no sentido do lema acima. Pelo mesmo lema sai que $\mathrm{Inn}(H)$ é par em R. Concluímos que $H \in \mathfrak{I}$, como queríamos. Verifiquemos o fecho de $\mathfrak{I}$ para produtos normais: sejam H_1, $H_2 \trianglelefteq G$, tais que $H_1H_2 = G$ e H_1, $H_2 \in \mathfrak{I}$. Notemos novamente $Q = O_{2'}(G)$. Para além disso ponhamos também $R_1 = O_{2'}(H_1)$ e $R_2 = O_{2'}(H_2)$. Da mesma forma que acima, concluímos que Q/R_1 é centralizado por $\mathrm{Inn}(H_1)$ e Q/R_2 é centralizado por $\mathrm{Inn}(H_2)$. Por hipótese $\mathrm{Inn}(H_1)$ é par em R_1 e $\mathrm{Inn}(H_2)$ é par em R_2. Pelo lema anterior, $\mathrm{Inn}(H_1)$ e $\mathrm{Inn}(H_2)$ são pares em Q. Concluímos que $\mathrm{Inn}(G)$ é par em Q ($G = H_1H_2$) e portanto $G \in \mathfrak{I}$, como queríamos. $\square$

Proposição 3.1.3. *Seja* $\mathfrak{I} = \{G \in \mathfrak{S} : \mathrm{Inn}(G)$ *é par em* $O_{2'}(G)\}$ *e* G *um grupo (finito e resolúvel). Então se* V *for um* $\mathfrak{I}$*-injector de* G*, temos que* $|G : V| = 1$ *ou* $|G : V| = 2$.

Demonstração. Ponha-se $Q = O_{2'}(G)$. Se $\mathrm{Inn}(G)$ é par em Q, então $G \in \mathfrak{I}$ e portanto $V = G$ ($G_{\mathfrak{I}} = G$) e temos o caso $|G : V| = 1$. Se $\mathrm{Inn}(G)$ não for par em Q então é fácil de ver que existe um subgrupo normal V de G, tal que $|G : V| = 2$ e $\mathrm{Inn}(V)$ é par em Q.[13] $\square$

De acordo com a observação acima, se V é um $\mathfrak{I}$-injector de G, então $V = G_{\mathfrak{I}}$.

Corolário (Blessenohl and Gaschütz [5])**.** $\mathfrak{I} = \{G \in \mathfrak{S} : \mathrm{Inn}(G)$ *é par em* $O_{2'}(G)\}$ *é uma classe de Fitting normal.*

Finalmente chegamos a um exemplo que mostra o comportamento dos radicais, relativamente ao produto directo, como atrás descrito: Seja $G = S_3$ e tome-se $\mathfrak{I}$ como acima. Temos que $G \notin \mathfrak{I}$ e portanto, se V for um $\mathfrak{I}$-injector, $V = G_{\mathfrak{I}}$ e $|G : G_{\mathfrak{I}}| = 2$. Daqui sai que $|G \times G : G_{\mathfrak{I}} \times G_{\mathfrak{I}}| = 4$. Por outro lado $|G \times G : (G \times G)_{\mathfrak{I}}| = 2$. Concluímos que $(G_{\mathfrak{F}} \times G_{\mathfrak{F}}) < (G \times G)_{\mathfrak{F}}$.

[13] vide por exemplo Isaacs [29], Lemma 1.34.

3.2 As operações e a secção de Lockett

Este exemplo motiva-nos a prosseguir o estudo iniciado por Lockett, acerca da classe de Fitting $\mathfrak{F}^*$. Como o mencionado na introdução do capítulo, a partir desta secção e até entrarmos na secção 3.4 as classes e grupos tomados estão no universo $\mathfrak{F}$. Começamos com a seguinte

Definição 3.2.1. Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting. Definimos:

$$\mathfrak{F}^* = (G \in \mathfrak{E} : (G \times G)_{\mathfrak{F}} \text{ é subdirecto em } (G \times G)),$$

a que chamamos *operação estrela para cima de Lockett.*

Relembremos, como sublinhado no início da secção, que o nosso objectivo primeiro será demonstrar que $(G_{\mathfrak{F}^*} \times G_{\mathfrak{F}^*}) = (G \times G)_{\mathfrak{F}^*}$.

Lema 3.2.1. *Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting e G um grupo finito. Temos:*

(a) Se $(g_1, g_2) \in (G \times G)_{\mathfrak{F}}$, então $(g_1, g_1^{-1}) \in (G \times G)_{\mathfrak{F}}$ e $g_1g_2 \in G_{\mathfrak{F}}$;

(b) As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $G \in \mathfrak{F}^*$;

(ii) $\forall g \in G,\ (g, g^{-1}) \in (G \times G)_{\mathfrak{F}}$;

(iii) $(G \times G)_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{F}} \times G_{\mathfrak{F}}) \langle (g, g^{-1}) : g \in G \rangle$.

Demonstração. (a) Suponhamos que $(g_1, g_2) \in (G \times G)_{\mathfrak{F}}$ e notemos $D = G \times G \times G$. Temos que $(G_{\mathfrak{F}} \times G_{\mathfrak{F}}) \times 1 = (G \times G \times 1)_{\mathfrak{F}}$ e como $G \times G \times 1 \trianglelefteq D$, pela proposição 1.5.4 vem que $(G \times G \times 1)_{\mathfrak{F}} = (G \times G \times 1) \cap D_{\mathfrak{F}}$[14]. Portanto $(g_1, g_2, 1) \in D_{\mathfrak{F}}$ e pelo facto de $D_{\mathfrak{F}}$ *car* D, também $(1, g_2, g_1) \in D_{\mathfrak{F}}$. Logo, $(g_1, g_2, 1)(1, g_2^{-1}, g_1^{-1}) = (g_1, 1, g_1^{-1}) \in D_{\mathfrak{F}}$. Como $(g_1, 1, g_1^{-1}) \in G \times 1 \times G$, usando [14], sai que $(g_1, 1, g_1^{-1}) \in (G \times 1 \times G)_{\mathfrak{F}}$. Fazendo a identificação de $G \times 1 \times G$ com $G \times G$, concluímos que $(g_1, g_1^{-1}) \in (G \times G)_{\mathfrak{F}}$. Para além disso $(1, g_1g_2) = (g_1^{-1}, g_1)(g_1, g_2) \in (G \times G)_{\mathfrak{F}} \cap (1 \times G) = 1 \times G_{\mathfrak{F}}$, novamente pela proposição 1.5.4, o que demonstra (a).
(b) *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*: Seja $G \in \mathfrak{F}^*$. por definição $(G \times G)_{\mathfrak{F}}$ é subdirecto em $G \times G$. Tomemos $g_1 \in G$. Então, existe $g_2 \in G$ tal que $(g_1, g_2) \in (G \times G)_{\mathfrak{F}}$. Pela alínea (a) sai que $(g_1, g_1^{-1}) \in (G \times G)_{\mathfrak{F}}$ e temos (ii).
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Suponhamos que $\langle (g^{-1}, g) : g \in G \rangle \leqslant (G \times G)_{\mathfrak{F}}$. Como $G_{\mathfrak{F}} \times G_{\mathfrak{F}} \leqslant$

[14]Da mesma forma $(G \times 1 \times G)_{\mathfrak{F}} = (G \times 1 \times G) \cap D_{\mathfrak{F}}$.

$(G \times G)_{\mathfrak{F}}$, temos uma das inclusões. Para provar a outra inclusão, tomemos $(g_1, g_2) \in (G \times G)_{\mathfrak{F}}$. Por (a) sai que $g_1 g_2 \in G_{\mathfrak{F}}$. Ora, $(g_1, g_2) = (1, g_1 g_2)(g_1, g_1^{-1}) \in (G_{\mathfrak{F}} \times G_{\mathfrak{F}}) \langle (g^{-1}, g) : g \in G \rangle$ e temos o que queríamos.
$(iii) \Rightarrow (i)$: Se supusermos (iii) é imediato que $(G \times G)_{\mathfrak{F}}$ é subdirecto em $(G \times G)$, como pretendido. $\square$

Lema 3.2.2. *Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting, $G \in \mathfrak{F}^*$ e A um grupo de operadores que actuam sobre G. Então $[G, A] \leqslant G_{\mathfrak{F}}$. Em particular, $G/G_{\mathfrak{F}}$ é abeliano.*[15]

Demonstração. Pela alínea (b) do lema anterior, temos $(g, g^{-1}) \in (G \times G)_{\mathfrak{F}}$, para cada $g \in G$. Tendo em conta a definição 1.2.5, se $\alpha \in A$ (A grupo de operadores sobre G) e considerando A a actuar apenas sobre a primeira coordenada de $G \times G$, podemos ver esta acção sobre $G \times G$ como um automorfismo de $G \times G$. Desta forma, como $(G \times G)_{\mathfrak{F}}$ *car* $(G \times G)$, $(g^{\alpha}, g^{-1}) \in (G \times G)_{\mathfrak{F}}$. Agora, pela alínea (a) do mesmo lema, $[g, \alpha] = g^{-1} g^{\alpha} \in G_{\mathfrak{F}}$, donde concluímos que $[G, A] \leqslant G_{\mathfrak{F}}$. A última afirmação sai imediatamente se pensarmos em G a actuar sobre si mesmo por conjugação. $\square$

Proposição 3.2.3 (Lockett [34])**.** *Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting. Então $\mathfrak{F}^*$ é uma classe de Fitting.*

Demonstração. Provemos primeiro que $\mathfrak{F}^*$ é fechado para subgrupos subnormais (fechado para S_n): Seja $N \trianglelefteq G \in \mathfrak{F}^*$. Pelo lema 3.2.1 alínea (b), $(G \times G)_{\mathfrak{F}}$ contém $\langle (g, g^{-1}) : g \in G \rangle$. Pela proposição 1.5.4 alínea (c) temos que $(N \times N)_{\mathfrak{F}} = (N \times N) \cap (G \times G)_{\mathfrak{F}}$ e portanto $\langle (n, n^{-1}) : n \in N \rangle$ está contido em $(N \times N)_{\mathfrak{F}}$ e novamente pelo lema 3.2.1 concluimos que $N \in \mathfrak{F}^*$.
Vejamos que $\mathfrak{F}^*$ é fechado para N_0: Sejam N_1, $N_2 \trianglelefteq G$, tais que $G = N_1 N_2$ e N_1, $N_2 \in \mathfrak{F}^*$. Como N_1, $N_2 \trianglelefteq G$, G actua por conjugação sobre N_1 e sobre N_2 e de acordo com a nossa definição, pode ser visto como grupo de operadores sobre cada um deles. Pelo lema anterior temos $[N_1, G] \leqslant (N_1)_{\mathfrak{F}}$ e analogamente para N_2. Portanto $G' = [N_1 N_2, G] = [N_1, G][N_2, G] \leqslant G_{\mathfrak{F}}$. Seja $g \in G$, então $g = n_1 n_2$ para alguns $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$. Claramente $[n_2^{-1}, n_1^{-1}] \in G_{\mathfrak{F}}$ e temos que $(g, g^{-1}) = (n_1, n_1^{-1})(n_2, n_2^{-1})(1, [n_2^{-1}, n_1^{-1}]) \in (N_1 \times N_1)_{\mathfrak{F}} (N_2 \times N_2)_{\mathfrak{F}} (1 \times G_{\mathfrak{F}}) \leqslant (G \times G)_{\mathfrak{F}}$. Pelo lema 3.2.1, alínea (b) sai que $G \in \mathfrak{F}^*$ e $\mathfrak{F}^*$ é fechada para N_0, como queríamos. $\square$

Lema 3.2.4. *Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting e G um grupo finito. Então $(G \times G)_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{F}} \times G_{\mathfrak{F}}) \langle (g, g^{-1}) : g \in G_{\mathfrak{F}^*} \rangle$.*

[15] Veremos adiante que $(\mathfrak{F}_*)^* = \mathfrak{F}^*$ e portanto deste lema vem que, $[G, A] \leqslant G_{\mathfrak{F}_*}$ e $G/G_{\mathfrak{F}_*}$ é abeliano.

Demonstração. Seja $G^* = \pi_1((G \times G)_{\mathfrak{F}})$. Então $G^* = \pi_2((G \times G)_{\mathfrak{F}})$, pois $(G \times G)_{\mathfrak{F}}$ *car* $G \times G$ e pensando no automorfismo que troca as coordenadas de $G \times G$, temos o pretendido. Por outro lado, $(G \times G)_{\mathfrak{F}} \leqslant G^* \times G^* \trianglelefteq G \times G$ (usando novamente o facto de $(G \times G)_{\mathfrak{F}}$ ser característico em $G \times G$). Ora, $(G^* \times G^*)_{\mathfrak{F}} = (G^* \times G^*) \cap (G \times G)_{\mathfrak{F}} \leqslant (G \times G)_{\mathfrak{F}}$, portanto $(G^* \times G^*)_{\mathfrak{F}} = (G \times G)_{\mathfrak{F}}$ (a outra das desigualdades é imediata da definição) e vem que $(G^* \times G^*)_{\mathfrak{F}}$ é subdirecto em $G^* \times G^*$, por definição de G^*. Logo $G^* \in \mathfrak{F}^*$ e sai que $G^* \leqslant G_{\mathfrak{F}^*}$. Usando um raciocínio como o acima apresentado, $(G \times G)_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{F}^*} \times G_{\mathfrak{F}^*})_{\mathfrak{F}}$ e sai imediatamente o que queríamos, apelando ao lema 3.2.1, alínea (b) e ao facto de $(G_{\mathfrak{F}^*})_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}$.[16] □

Definição 3.2.2. Sejam R e S subgrupos característicos de G, tais que $S \leqslant R$ e tomemos $A = Aut(G)$. Dizemos que: R/S é *característicamente hipercentral* em G, se para algum $n \in \mathbb{N}$

$$[R, \underbrace{A, \ldots, A}_{n}] \leqslant S;$$

No caso em que $n = 1$, dizemos que R/S é *característicamente central* em G.

Definição 3.2.3. Seja A um grupo de operadores sobre um grupo G. Dizemos que A *actua hipercentralmente* sobre G se existir um natural n tal que $[G, \underbrace{A, \ldots, A}_{n}] = 1$.[17]

Antes de prosseguirmos, notemos $G^n = \underbrace{G \times \cdots \times G}_{n \text{ vezes}}$.

Proposição 3.2.5. *Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $G \in \mathfrak{F}^*$;

(b) $G^n/(G^n)_{\mathfrak{F}}$ *é característicamente central em* G*, onde* $n \in \mathbb{N}$;

(c) $G^n/(G^n)_{\mathfrak{F}}$ *é característicamente hipercentral em* G*, onde* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Seja $G \in \mathfrak{F}^*$. Por 3.2.3 temos que $G^n \in \mathfrak{F}^*$ e por 3.2.2 vem que $[G^n, A] \leqslant (G^n)_{\mathfrak{F}}$ $(A = \mathrm{Aut}(G^n))$ e sai o resultado desejado.
$(b) \Rightarrow (c)$: É imediato.
$(c) \Rightarrow (a)$: Suponhamos que (c) é válida. Seja $n \in \mathbb{P}$, $n \nmid |G/G_{\mathfrak{F}}|$. Então

[16] Daqui concluímos que $G_{\mathfrak{F}^*} \leqslant G^*$ e portanto $G_{\mathfrak{F}^*} = G^*$.

[17] Logo, R/S é característicamente hipercentral em G sse $Aut(G)$ actua hipercentralmente em R/S.

$n \nmid |G^n/(G^n)_{\mathfrak{F}}|$, pois $G^n/(G^n)_{\mathfrak{F}}$ é imagem epimórfica de $G^n/(G_{\mathfrak{F}})^n \simeq (G/G_{\mathfrak{F}})^n$. Seja α o automorfismo de G^n definido por: α: $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \mapsto (g_n, g_1, g_2, \ldots, g_{n-1})$. Temos que $|\langle\alpha\rangle| = n$ e $\langle\alpha\rangle$ é um grupo de operadores sobre G^n. Como tal actua hipercentralmente sobre $G^n/(G^n)_{\mathfrak{F}}$. Pelo facto de $m.d.c.(|G^n/(G^n)_{\mathfrak{F}}|, n) = 1$ ($n = |\langle\alpha\rangle|$) concluímos que $[G^n/(G^n)_{\mathfrak{F}}, \alpha] = 1$[18], ou seja, $[G^n, \alpha] \leqslant (G^n)_{\mathfrak{F}}$. Portanto dado $g \in G$, $(g^{-1}, g, 1, \ldots, 1) \in G^n$ e $(g^{-1}, g, 1, \ldots, 1) = (g, 1, \ldots, 1)^{-1}(g, 1, \ldots, 1)^{\alpha} \in [G^n, \alpha]$, donde $(g^{-1}, g, 1, \ldots, 1) \in (G^n)_{\mathfrak{F}}$. Daqui sai que $(g^{-1}, g) \in (G \times G)_{\mathfrak{F}}$ e concluímos que $G \in \mathfrak{F}^*$, como queríamos. □

Proposição 3.2.6 (Lockett [34])**.** *Sejam $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ classes de Fitting. Então:*

(a) $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}^*)^* \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{A}$[19]*;*

(b) Se $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$, então $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{G}^*$.

Demonstração. (a) Seja $G \in \mathfrak{F}$, então $G \times G \in \mathfrak{F}$ e portanto $(G \times G)_{\mathfrak{F}} = G \times G$, donde $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$. Pelo lema 3.2.2, se $G \in \mathfrak{F}^*$, vem que $G/G_{\mathfrak{F}}$ é abeliano ($G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$) e portanto $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{A}$. Resta-nos verificar que $\mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}^*)^*$. A inclusão $\mathfrak{F}^* \subseteq (\mathfrak{F}^*)^*$ é clara. Para ver a outra, tomemos $G \in (\mathfrak{F}^*)^*$ e notemos $A = \mathrm{Aut}(G)$. Pelo lema 3.2.2 temos, por um lado $[G_{\mathfrak{F}}, A] \leqslant G_{\mathfrak{F}^*}$, por outro, como $G_{\mathfrak{F}^*} \in \mathfrak{F}^*$, sai que $[G_{\mathfrak{F}^*}, A] \leqslant (G_{\mathfrak{F}^*})_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}$. Das duas desigualdades apresentadas, concluímos que $G/G_{\mathfrak{F}}$ é característicamente hipercentral. Da mesma forma poderíamos verificar que $G^n/(G^n)_{\mathfrak{F}}$ é característicamente hipercentral (como $G \in \mathfrak{F}^*$, $G^n \in \mathfrak{F}^*$). Assim, pela proposição anterior vem que $G \in \mathfrak{F}^*$, como queríamos.
(b) Suponhamos que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$ e seja $G \in \mathfrak{F}^*$. Então $(G \times G)_{\mathfrak{F}} \subseteq (G \times G)_{\mathfrak{G}}$ e $(G \times G)_{\mathfrak{F}}$ é subdirecto em $G \times G$. Daqui concluímos que $(G \times G)_{\mathfrak{G}}$ também o é e logo $G \in \mathfrak{G}^*$. □

Teorema 3.2.7 (Lockett)**.** *Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$;

(b) Para quaisquer grupos G e H, $(G \times H)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \times H_{\mathfrak{F}}$;

(c) Para quaisquer grupos G, $H \in \mathfrak{F}\mathfrak{A}$, $(G \times H)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \times H_{\mathfrak{F}}$.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Para obtermos a igualdade descrita em (b), basta ver que $(G \times H)_{\mathfrak{F}} \leqslant G_{\mathfrak{F}} \times H_{\mathfrak{F}}$. Suponhamos que $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$ e seja $(g, h) \in (G \times H)_{\mathfrak{F}}$. Identificando $(G \times H)$ com cada um dos subgrupos $G \times H \times 1$ e $G \times 1 \times H$ de $G \times H \times H$,

[18] Usamos aqui um resultado que pode ser encontrado em Huppert [28]: Se A é um grupo de operadores que actua hipercentralmente sobre G, tal que $m.d.c.(|G|, |A|) = 1$, então $[G, A] = 1$.

[19] $\mathfrak{A}$ designa, como usualmente, a classe dos grupos finitos e abelianos.

temos que $(g,h,1)$, $(g,1,h) \in (G \times H \times H)_{\mathfrak{F}}$ e portanto $(h,h^{-1}) \in (H \times H)_{\mathfrak{F}}$. Pelo lema 3.2.4, $(H \times H)_{\mathfrak{F}} \leqslant H_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*} = H_{\mathfrak{F}} \times H_{\mathfrak{F}}$ ($\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$, por hipótese), donde $h \in H_{\mathfrak{F}}$. Analogamente vemos que $g \in G_{\mathfrak{F}}$ e concluímos que $(G \times H)_{\mathfrak{F}} \leqslant G_{\mathfrak{F}} \times H_{\mathfrak{F}}$, como queríamos.
$(b) \Rightarrow (c)$ É imediato.
$(c) \Rightarrow (a)$: Suponhamos, por hipótese, que (c) é verdadeira. Queremos ver que $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$ e para isso basta ver que $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}$. Seja $G \in \mathfrak{F}^*$, então $(G \times G)_{\mathfrak{F}}$ é subdirecto em $(G \times G)$ e para além disso, pela proposição anterior $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{A}$. Por hipótese vem que $(G \times G)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \times G_{\mathfrak{F}}$ e concluímos que $G_{\mathfrak{F}} \times G_{\mathfrak{F}}$ é subdirecto em $G \times G$. Como consequência, $G = G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ e portanto $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}$ como queríamos. $\square$

Corolário. *Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ e $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting. Então dado um grupo G, $G \in \mathfrak{F}^*$ se e só se $(G^n)_{\mathfrak{F}}$ é subdirecto em G^n.*

Demonstração. O caso $n = 2$ sai imediatamente por definição. Se $n > 2$:
$(\Rightarrow)$: Suponhamos que $G \in \mathfrak{F}^*$. Identificando $G \times G$ com $G \times G \times 1 \times \cdots \times 1$, então $(G \times G \times \cdots \times G)_{\mathfrak{F}}$ projecta-se na primeira componente de G^n. Como $(G \times G \times 1 \times \cdots \times 1)_{\mathfrak{F}} \leqslant (G \times G \times \cdots \times G)_{\mathfrak{F}} = (G^n)_{\mathfrak{F}}$, vem que $(G^n)_{\mathfrak{F}}$ também se projecta na primeira coordenada de G^n. Identificando apropriadamente, o mesmo é verdadeiro para as restantes componentes e sai que $(G^n)_{\mathfrak{F}}$ é subdirecto em G^n.
$(\Leftarrow)$: Suponhamos que $(G^n)_{\mathfrak{F}}$ é subdirecto em G^n. Temos que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$ e portanto $(G^n)_{\mathfrak{F}} \leqslant (G^n)_{\mathfrak{F}^*}$. Por outro lado, $\mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}^*)^*$ e logo, por 3.2.7 sai que $(G^n)_{\mathfrak{F}^*} = (G_{\mathfrak{F}^*})^n$. Concluímos que $(G^n)_{\mathfrak{F}} \leqslant (G^n)_{\mathfrak{F}^*} = (G_{\mathfrak{F}^*})^n$. Se $G_{\mathfrak{F}^*} < G$, então $(G_{\mathfrak{F}^*})^n$ não pode ser subdirecto em G^n. Mas por hipótese $(G^n)_{\mathfrak{F}}$ é subdirecto em G^n e então, pelo que concluímos acima, sai que $G = G_{\mathfrak{F}^*} \in \mathfrak{F}^*$, como queríamos.
$\square$

Teorema 3.2.8. *Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting e G um grupo. Então:*
$$(G^n)_{\mathfrak{F}} = \left\{ g = (g_1, \ldots, g_n) : g \in (G_{\mathfrak{F}^*})^n, \prod_{i=1}^{n} g_i \in G_{\mathfrak{F}} \right\}.$$

Demonstração. Seja $g \in (G^n)_{\mathfrak{F}}$. Temos que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$, portanto $(G^n)_{\mathfrak{F}} \leqslant (G^n)_{\mathfrak{F}^*} = (G_{\mathfrak{F}^*})^n$ (a igualdade sai pelo teorema 3.2.7). Logo $g \in (G_{\mathfrak{F}^*})^n$.
Para provar a igualdade acima, tomamos $g = (g_1, \ldots, g_n) \in (G_{\mathfrak{F}^*})^n$ e vemos que $g \in (G^n)_{\mathfrak{F}}$ sse $\prod_{i=1}^{n} g_i \in G_{\mathfrak{F}}$. Seja $g = (g_1, \ldots, g_n) \in (G_{\mathfrak{F}^*})^n$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, ponhamos $x_i = g_1 \ldots g_i$ e $y_i = (1, \ldots, 1, g_i, g_i^{-1}, 1, \ldots, 1)$, onde g_i ocupa a i-ésima entrada e portanto g_i^{-1} está na $(i+1)$-ésima posição. Como $x_i \in G_{\mathfrak{F}^*}$, pelo lema 3.2.4 vem que $y_i \in (1 \times \cdots \times 1 \times G \times G \times 1 \times \cdots \times 1)_{\mathfrak{F}}$, donde concluímos

que $y_i \in (G^n)_{\mathfrak{F}}$. Por outro lado, $(g_1, \ldots, g_n) = (x_1, x_1^{-1}x_2, x_2^{-1}x_3, \ldots, x_{n-1}^{-1}x_n) = y_1y_2\ldots y_{n-1}(1, \ldots, 1, x_n)$. Daqui sai que $g \in (G^n)_{\mathfrak{F}}$ sse $(1, \ldots, 1, x_n) \in (G^n)_{\mathfrak{F}}$. Mas $(1 \times \cdots \times 1 \times G) \cap (G^n)_{\mathfrak{F}} = 1 \times \cdots \times 1 \times G_{\mathfrak{F}}$ e consequentemente $g \in (G^n)_{\mathfrak{F}}$ sse $x_n = g_1 \ldots g_n \in G_{\mathfrak{F}}$, como queríamos. $\square$

Definição 3.2.4. Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting.

(a) Dizemos que $\mathfrak{F}$ é uma *classe de Lockett* se $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$;

(b) Definimos uma operação $(_*)$, como se segue

$$\mathfrak{F}_* = \bigcap \{\mathfrak{X} : \mathfrak{X} \text{ é uma classe de Fitting tal que } \mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*\},$$

que designamos por *operação estrela para baixo de Lockett.*

Observações. Da alínea (a) da definição acima, recorrendo ao teorema 3.2.7, sai que as classes de Lockett são precisamente as classes de Fitting para as quais o radical do produto directo é o produto directo dos radicais.
Claramente $\mathfrak{F}_*$ é uma classe de Fitting. Adiante veremos que $(\mathfrak{F}_*)^* = \mathfrak{F}^*$. Esta propriedade permite-nos concluir que a cada classe de Lockett $\mathfrak{F}$, está associada menor classe de Fitting cuja estrela para cima de Lockett é $\mathfrak{F}$, nomeadamente $\mathfrak{F}_*$.

Com o objectivo de provar o que acima foi referido ($(\mathfrak{F}_*)^* = \mathfrak{F}^*$), enunciamos e provamos um lema e uma proposição, que nos permitirão concluir o resultado desejado.

Lema 3.2.9. *Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting. Dado um grupo G, G é um elemento de $\mathfrak{F}^*$ se e só se o seguinte subgrupo de $G \times G$*

$$T = (G' \times G') \left\langle (g, g^{-1}) : g \in G \right\rangle$$

é um elemento de $\mathfrak{F}$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $G \in \mathfrak{F}^*$. Pelo lema 3.2.2 temos que $G' \leqslant G_{\mathfrak{F}}$. Portanto $T \trianglelefteq (G_{\mathfrak{F}} \times G_{\mathfrak{F}}) \langle (g, g^{-1}) : g \in G \rangle = (G \times G)_{\mathfrak{F}}$, a última igualdade pelo lema 3.2.1. Concluímos que $T \in \mathrm{S}_n\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.
($\Leftarrow$) Suponhamos que $T \in \mathfrak{F}$. Então $(G \times G)_{\mathfrak{F}}$ contém T e pelo lema 3.2.1 $G \in \mathfrak{F}^*$.
$\square$

Proposição 3.2.10 (Lockett [34]). *Seja $\{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ um conjunto de classes de Fitting. Então:*

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} \mathfrak{F}_\alpha\right)^* = \bigcap_{\alpha \in A} (\mathfrak{F}_\alpha)^*. \quad (1)$$

Demonstração. Dado um grupo G arbitrário, ponhamos T como no lema 3.2.9. Então G pertence ao lado esquerdo da equação (1) da proposição 3.2.10 sse $T \in \bigcap_{\alpha\in A} \mathfrak{F}_\alpha$ (utilizando o lema 3.2.9) o que é equivalente a $T \in \mathfrak{F}_\alpha$, para cada $\alpha \in A$ sse $G \in (\mathfrak{F}_\alpha)^*$, para cada $\alpha \in A$ (novalmente pelo lema 3.2.9) ou equivalentemente G pertence ao lado direito da equação (1) da proposição 3.2.10, como queríamos. □

Utilizando a proposição anterior, juntamente com a definição de $\mathfrak{F}_*$, sai que $(\mathfrak{F}_*)^* = \mathfrak{F}^*$. Agora, fazendo uso da proposição 3.2.6, alínea (a), com o facto atrás mencionado, concluímos a cadeia de inclusões do teorema seguinte.

Teorema 3.2.11 (Lockett [34])**.** *Para qualquer classe de Fitting $\mathfrak{F}$ temos*

$$(\mathfrak{F}_*)_* = \mathfrak{F}_* = (\mathfrak{F}^*)_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}_*)^* \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{A}.$$

Definição 3.2.5. A cada classe de Fitting $\mathfrak{F}$, associamos um conjunto de classes de Fitting, cuja definição é a que se segue,

$$\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F}) = \{\mathfrak{G} : \mathfrak{G} \text{ é uma classe de Fitting e } \mathfrak{G}^* = \mathfrak{F}^*\}$$

que designamos por *secção de Lockett* de $\mathfrak{F}$.

Observação. Dada uma classe de Fitting $\mathfrak{F}$, dizemos que $\mathfrak{F}$ tem uma secção de Lockett trivial se $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F}) = \{\mathfrak{F}\}$. Tendo isto presente, é consequência imediata da definição que ter uma secção de Lockett trivial é uma condição suficiente para que uma classe de Fitting seja uma classe de Lockett.

A proposição seguinte mostra-nos que a secção de Lockett, acima introduzida, é constituída pelas classes de Fitting que se encontram entre $\mathfrak{F}_*$ e $\mathfrak{F}^*$. Aliás, formam um reticulado que Lausch, em 1973, provou ser isomorfo ao reticulado dos subgrupos de um certo grupo abeliano.

Teorema 3.2.12. *Para um dado par de classes de Fitting $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\mathfrak{G} \in \mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$*;*

(b) $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}^*$*;*

(c) $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Locksec}(\mathfrak{G})$.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Seja $\mathfrak{G} \in \text{Locksec}(\mathfrak{F})$. Então $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{G}^* = \mathfrak{F}^*$. Pelo teorema 3.2.11 temos $\mathfrak{F}_* = (\mathfrak{F}^*)_* = (\mathfrak{G}^*)_* = \mathfrak{G}_* \subseteq \mathfrak{G}$ e portanto (b);
$(b) \Rightarrow (c)$: Suponhamos que $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}^*$. Pela proposição 3.2.6, alínea (b) vem que $(\mathfrak{F}_*)^* \subseteq \mathfrak{G}^* \subseteq (\mathfrak{F}^*)^*$. Utilizando agora a alínea (a) da proposição 3.2.6 juntamente com o teorema 3.2.11, temos que $(\mathfrak{F}^*)^* = \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}_*)^*$, portanto $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{F}^*$ e sai (c);
$(c) \Rightarrow (a)$: É imediato. □

Observação. Analisando com mais atenção o teorema precedente, vemos que as secções de Lockett formam uma partição de todas as classes de Fitting.

Proposição 3.2.13 (Bryce and Cossey [9]). *Sejam $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ classes de Fitting, tais que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$. Então $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_*$.*

Demonstração. Para conluirmos o que queremos basta ver que $\mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_*)^*$ e utilizar directamente a definição de $\mathfrak{F}_*$. Tendo em conta esse objectivo temos, pela proposição 3.2.10. que $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_*)^* = \mathfrak{F}^* \cap (\mathfrak{G}_*)^*$. Ora, utilizando o teorema 3.2.11 e novamente a proposição 3.2.10 vem $\mathfrak{F}^* \cap (\mathfrak{G}_*)^* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{G}^* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G})^* = \mathfrak{F}^*$, como queríamos. □

Se $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ forem classes de Fitting tais que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$, esta proposição permite-nos concluir que

$$\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F} \tag{2}$$

define uma aplicação de $\text{Locksec}(\mathfrak{G})$ para $\text{Locksec}(\mathfrak{F})$. Pois se $\mathfrak{F} \in \text{Locksec}(\mathfrak{G})$, então pelo teorema 3.2.12 vem que $\mathfrak{G}_* \subseteq \mathfrak{X}$, por um lado. Por outro lado, pela proposição anterior temos que $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_* \subseteq \mathfrak{G}_*$. Logo $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}$. Como $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$, temos $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F} \in \text{Locksec}(\mathfrak{F})$, novamente pelo teorema 3.2.12. Perante isto, pôs-se a questão de saber quando é que esta apliacação era sobrejectiva. Berger mostrou que, para o par $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{E}$ a resposta era afirmativa.
No entanto esta questão questão já tinha começada a ser sondada por Lockett, no artigo *The Fitting Class* $\mathfrak{F}^*$, onde este interroga se esta aplicação será sempre sobrejectiva para o caso em que $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}$.[20] Apesar de terem mostrado que esta conjectura era verdadeira para algumas classes de Fitting, Berger e Cossey mostraram que, em geral, esta conjectura era falsa. Após esta reflexão surge naturalmente a seguinte

Definição 3.2.6. Dadas classes de Fitting $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ tais que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$, dizemos que $\mathfrak{F}$ *satisfaz a conjectura de Lockett com respeito a* $\mathfrak{G}$ se a aplicação definida na equação

[20] Questão esta que, mais tarde ficou conhecida precisamente por "A Conjectura de Lockett", embora não tivesse originalmente sido posta dessa forma.

(2), de Locksec($\mathfrak{G}$) para Locksec($\mathfrak{F}$) for sobrejectiva.

Embora não mostremos isto no presente trabalho, Bryce e Cossey provaram que uma condição necessária e suficiente para $\mathfrak{F}$ satisfazer a conjectura de Lockett com respeito a $\mathfrak{G}$ é que $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{G}_*$.
De forma a podermos estudar mais propriedades da secção de Lockett, enunciamos e provamos alguns resultados auxiliares.

Lema 3.2.14. *Seja G um grupo finito. Se G possui um factor de composição de ordem $p \in \mathbb{P}$, então $C_p \in S_{\mathrm{n}}N_0S_{\mathrm{n}}(G)$.*

Demonstração. Seja H/K um factor de composição de G de ordem $p \in \mathbb{P}$ e seja $g \in H \backslash K$, cuja ordem é uma potência de p. Tomemos $Z = \langle z \rangle$, um grupo cíclico de ordem p e ponhamos $D = H \times Z$. Temos que $K \times 1 \trianglelefteq D$ e $\langle (g,z) \rangle \trianglelefteq D$ e portanto $H^* = (K \times 1) \langle (g,k) \rangle \trianglelefteq D$. Por outro lado $(H \times 1) <\cdot\, D$ e $H^* \nsubseteq (H \times 1)$, logo $(H \times 1)H^* = D$. Cada elemento de H pode ser expresso na forma kg^i, onde $k \in K$ e $0 \leqslant i \leqslant p-1$ e é imediato verificar que $kg^i \mapsto (kg^i, z^i)$ define um isomorfismo de H para H^*. Como $H \in S_{\mathrm{n}}(G)$, $H^* \in S_{\mathrm{n}}(G)$, segue-se que $D \in N_0S_{\mathrm{n}}(G)$. Pelo facto de $Z \in S_{\mathrm{n}}(D)$, concluímos que $Z \in S_{\mathrm{n}}N_0S_{\mathrm{n}}(G)$, como queríamos. □

É consequência imediata deste lema que, se $\mathfrak{F}$ for uma classe de Fitting de grupos finitos e resolúveis , então $\mathrm{char}(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F})$.[21]

Lema 3.2.15. *Se $p \in \mathbb{P}$, então $\mathfrak{S}_p \subseteq S_{\mathrm{n}}N_0(C_p)$.*

Demonstração. Seja $p \in \mathbb{P}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, tome-se

$$W_n = (\ldots((C_p \underset{\mathrm{reg}}{\wr} C_p) \underset{\mathrm{reg}}{\wr} C_p) \ldots \underset{\mathrm{reg}}{\wr} C_p),$$

onde constam $n-1$ sinais de $\underset{\mathrm{reg}}{\wr}$. $W_n \in \mathfrak{S}_p \subseteq \mathfrak{N}$, portanto cada subgrupo de ordem p de W_n é subnormal. Daqui e pela sua construção sai que $W_n \in N_0(C_p)$. Se tomarmos um p-grupo arbitrário, pelo corolário do teorema 1.2.3, vem que esse p-grupo é isomorfo a um subgrupo (subnormal) de W_n, para um valor suficientemente grande de n. E concluímos o que queríamos. □

Como consequência imediata dos dois lemas precedentes temos o seguinte

[21] Recorde-se que já tínhamos observado que, em geral, se $\mathfrak{F}$ for uma classe de Fitting, então $\mathrm{char}(\mathfrak{F}) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.

Teorema 3.2.16. *Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting. Dado $\pi \subseteq \mathbb{P}$, char$(\mathfrak{F}) = \pi$ se e só se $\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$.*

Proposição 3.2.17. *Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting. Então $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathrm{Q}\mathfrak{F}$, char$(\mathfrak{F}^*) =$ char$(\mathfrak{F})$ e $\pi(\mathfrak{F}^*) = \pi(\mathfrak{F})$.*

Demonstração. Seja $G \in \mathfrak{F}^*$, então $\pi_1((G \times G)_\mathfrak{F}) = G$, logo $(G \times G)_\mathfrak{F}/ker\ \pi_1 \simeq Im\ \pi_1 = G$. Concluímos que $G \in \mathrm{Q}\mathfrak{F}$.
Como $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$, char$(\mathfrak{F}) \subseteq$ char$(\mathfrak{F}^*)$. Para vermos a outra inclusão, seja $C_p \in \mathfrak{F}^*$. Então $\mathfrak{S}_p \subseteq \mathfrak{F}^*$, pelo lema 3.2.15 e pela proposição 3.2.6, $\mathfrak{S}_p \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{A}$. Desta inclusão sai que $C_p \wr_{\text{reg}} C_p \in \mathfrak{F}\mathfrak{A}$. Como $(C_p \wr_{\text{reg}} C_p)_\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}$ e $p \mid |(C_p \wr_{\text{reg}} C_p)_\mathfrak{F}| > 1$, concluímos que $C_p \in \mathfrak{F}$. Portanto char$(\mathfrak{F}^*) \subseteq$ char$(\mathfrak{F})$ e temos a igualdade.
Suponhamos que $G \in \mathfrak{F}^*$. Por definição de $\mathfrak{F}^*$, temos que $(G \times G)_\mathfrak{F}$ é subdirecto em $G \times G$. Se $p \mid |G|$, então $p \mid |(G \times G)_\mathfrak{F}|$. Concluímos portanto que $\pi(\mathfrak{F}^*) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ e temos a igualdade pretendida. $\square$

Corolário. *Se $\mathfrak{F}$ for uma classe de Fitting fechada para quocientes* ($\mathrm{Q}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$)*, então $\mathfrak{F}$ é uma classe de Lockett.*

Observação. Resulta imediatamente desta proposição que se $\mathfrak{F}$ for uma classe de Fitting, então char$(\mathfrak{F}_*) =$ char$(\mathfrak{F})$. Ora, $(\mathfrak{F}_*)^* = \mathfrak{F}^*$, portanto pela proposição anterior temos que char$(\mathfrak{F}_*) =$ char$((\mathfrak{F}_*)^*)$, mas char$((\mathfrak{F}_*)^*) =$ char$(\mathfrak{F}^*) =$ char$(\mathfrak{F})$, a última das afirmações, novamente por 3.2.17.

No próximo teorema reanalisamos o lema 3.2.2, do ponto de vista da secção de Lockett e chegamos a uma série de condições equivalentes para que duas classes de Fitting estejam na mesma secção de Lockett.

Teorema 3.2.18. *Sejam $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ duas classes de Fitting, tais que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ pertencem à mesma secção de Lockett;

(b) $[G_\mathfrak{G}, Aut(G)] \leqslant G_\mathfrak{F}$, para cada $G \in \mathfrak{E}$;

(c) $G_\mathfrak{G}/G_\mathfrak{F} \leqslant Z(G/G_\mathfrak{F})$, para cada $G \in \mathfrak{E}$;

(d) $G_\mathfrak{G}/G_\mathfrak{F} \leqslant Z(G/G_\mathfrak{F})$, para cada $G \in \mathfrak{G}\mathfrak{A}$;

(e) $[G, Aut(G)] \leqslant G_\mathfrak{F}$, para cada $G \in \mathfrak{G}$

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ Temos que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}^*$ (por hipótese $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{G}^*$). Portanto, dado $G \in \mathfrak{E}$, $G_{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{F}^*$. Logo, como $\mathrm{Aut}(G)$ é um grupo de operadores de $G_{\mathfrak{G}}$, vem pelo lema 3.2.2 que $[G_{\mathfrak{G}}, \mathrm{Aut}(G)] \leqslant (G_{\mathfrak{G}})_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}$. Daqui concluímos imediatamente (b). A cadeia de implicações $(b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$ sai imediamente por considerações feitas anteriormente.
$(d) \Rightarrow (e)$ Sejam $G \in \mathfrak{G}$ e $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$. Tomemos $H = G \rtimes \langle\alpha\rangle$. Sai imediatamente que $H \in \mathfrak{G}\mathfrak{A}$ e que $G \leqslant H_{\mathfrak{G}}$ ($G \in \mathfrak{G} \Rightarrow G = G_{\mathfrak{G}} \leqslant H_{\mathfrak{G}}$). Portanto, por (d) temos que $[G, \mathrm{Aut}(G)] \leqslant H_{\mathfrak{F}}$. Ora, $[G, \mathrm{Aut}(G)] \leqslant G \cap H_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}$ (a igualdade é consequência da proposição 1.5.4), como pretendido.
$(e) \Rightarrow (a)$ Para esta implicação vamos verificar que $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}^*$, já que por hipótese $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$ e portanto $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{G}$. Seja $G \in \mathfrak{G}$. Então $G^n \in \mathfrak{G}$ e portanto pela alínea (e) vem que $[G^n, \mathrm{Aut}(G^n)] \leqslant (G^n)_{\mathfrak{F}}$. Ora, utilizando a proposição 3.2.5, concluímos que $G \in \mathfrak{F}^*$. Donde $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}^*$, como queríamos. □

Relembramos que dada uma classe de Fitting $\mathfrak{F}$, dizemos que $\mathfrak{F}$ tem uma secção de Lockett trivial se $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$. A próxima observação mostra-nos que as classes $\mathfrak{N}_\pi$, $\pi \subseteq \mathbb{P}$, são exemplos de classes de Fitting com uma secção de Lockett trivial.

Observações. (a) Dado $\pi \subseteq \mathbb{P}$, temos que $(\mathfrak{N}_\pi)_* = \mathfrak{N}_\pi = (\mathfrak{N}_\pi)^*$;

(b) Se $\mathfrak{F}$ for uma classe de Fitting tal que $\mathrm{char}(\mathfrak{F}) = \pi$, $\pi \subseteq \mathbb{P}$, então $\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{F}_*$.

Demonstração. (a) Por 3.2.17 temos que $(\mathfrak{N}_\pi)^* \subseteq \mathrm{Q}\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{N}_\pi$ e daqui concluímos que $\mathfrak{N}_\pi = (\mathfrak{N}_\pi)^*$. Para obtermos a outra igualdade, usamos a observação feita a seguir à proposição 3.2.17, para concluirmos que $char((\mathfrak{N}_\pi)_*) = char(\mathfrak{N}_\pi) = \pi$. Daqui, usando o teorema 3.2.16 sai que $\mathfrak{N}_\pi \subseteq (\mathfrak{N}_\pi)_*$, donde $(\mathfrak{N}_\pi)_* = \mathfrak{N}_\pi$.
(b) Por hipótese $char(\mathfrak{F}) = \pi$, logo por 3.2.16 $\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$. Pela observação anterior juntamente com a proposição 3.2.13 temos que $\mathfrak{N}_\pi = (\mathfrak{N}_\pi)_* \subseteq \mathfrak{F}_*$. □

Se $\mathfrak{F}$ for uma classe de Fitting com uma secção de Lockett trivial, então $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F}) = \{\mathfrak{F}\}$. Mas $\mathfrak{F}^* \in \mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$, pois $(\mathfrak{F}^*)^* = \mathfrak{F}^*$. Portanto $\mathfrak{F}$ é uma classe de Lockett. Nos dois próximos teoremas procuramos condições para que determinadas classes Fitting sejam classes de Lockett. Sendo que o primeiro deles é um refinamento do lema quasi-R_0, apresentado no capítulo anterior e dá-nos uma condição necessária e suficiente para que tal aconteça. Antes de procedermos precisamos de um pequeno lema.

Lema 3.2.19. *Se* $N_1, N_2, \ldots, N_r \trianglelefteq G = N_1 N_2 \ldots N_r$ *e* $K = \prod_{i=1}^{r} (N_i)_{\mathfrak{F}}$, *então* $G_{\mathfrak{F}}/K \leqslant Z(G/K)$.

Demonstração. Temos que $[G_{\mathfrak{F}}, G] = [G_{\mathfrak{F}}, N_1 N_2 \dots N_r] = \prod_{i=1}^{r} [G_{\mathfrak{F}}, N_i] \leqslant \prod_{i=1}^{r} (G_{\mathfrak{F}} \cap N_i) = \prod_{i=1}^{r} (N_i)_{\mathfrak{F}} = K$. Logo $G_{\mathfrak{F}}/K \leqslant Z(G/K)$. □

Teorema 3.2.20 (Hauck [24]). *Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) Para qualquer grupo G, com $M, N \trianglelefteq G$ tais que $N \cap M = 1$ e $G/MN \in \mathfrak{N}$, a seguinte condição é verificada:

$$G \in \mathfrak{F} \Leftrightarrow G/M, G/N \in \mathfrak{F}.$$

(b) $\mathfrak{F}$ é uma classe de Lockett;

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ Seja $G \in \mathfrak{F}^*$ e tomemos $(g_1, g_2) \in G \times G$. Pelo lema 3.2.1 alínea (b) temos que $(g_2^{-1}, g_2) \in (G \times G)_{\mathfrak{F}}$. Como $(g_1, g_2) = (g_2^{-1}, g_2)(g_2 g_1, 1) \in (G \times G)_{\mathfrak{F}}(G \times 1)$, sai que $(G \times G) = (G \times G)_{\mathfrak{F}}(G \times 1)$. Ponhamos $M = (G_{\mathfrak{F}} \times 1)$ e $N = (1 \times G_{\mathfrak{F}})$. Pelo lema anterior, $(G \times G)_{\mathfrak{F}}/MN$ é abeliano e portanto é nilpotente. Como $(G \times G)_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, vem por hipótese que $(G \times G)_{\mathfrak{F}}/M \in \mathfrak{F}$. Temos:

$$G \simeq (G \times G)/(G \times 1) = (G \times G)_{\mathfrak{F}}(G \times 1)/(G \times 1) \simeq$$

$$\simeq (G \times G)_{\mathfrak{F}}/(G \times G)_{\mathfrak{F}} \cap (G \times 1) = (G \times G)_{\mathfrak{F}}/M \in \mathfrak{F},$$

logo $G \in \mathfrak{F}$ e portanto $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}$, como queríamos.
$(b) \Rightarrow (a)$ Suponhamos que $\mathfrak{F}$ é uma classe de Lockett. Seja G um grupo com subgrupos normais $M, N \trianglelefteq G$ tais que $M \cap N = 1$.
Se $G/M, G/N \in \mathfrak{F}$, sai directamente pelo lema quasi-R_0 que $G \in \mathfrak{F}$.
Suponhamos então que $G \in \mathfrak{F}$. Exactamente como na demonstração do lema quasi-R_0, o homomorfismo:

$$\begin{aligned} \mu : \quad G &\longrightarrow (G/N) \times (G/M) \\ g &\longmapsto (gN, gM) \end{aligned}$$

é um monomorfismo e $\mu(G) \trianglelefteq\trianglelefteq D = (G/N) \times (G/M)$, donde $\mu(G) \leqslant D_{\mathfrak{F}}$. Como $\mu(G)$ é subdirecto em D, $D_{\mathfrak{F}}$ também o é e portanto $D \in \mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$. Logo $D \in \mathfrak{F}$ e concluímos que $G/M, G/N \in \mathfrak{F}$. □

Já tínhamos reparado no corolário da proposição 3.2.17 que, se $\mathfrak{F}$ fosse uma classe de Fitting fechada para quocientes, então $\mathfrak{F}$ era uma classe de Lockett. A próxima proposição mostra que se $\mathfrak{F}$ for fechada sobre certos operadores de fecho então é uma classe de Lockett. A questão óbvia que surge da proposição, é a de saber se a condição é também necessária. Ora, devido a uma contrução apresentada por Brison (para mais detalhes, vide Doerk and Hawkes [15] X.5.34 (a)), podemos obter uma classe de Lockett que não é fechada sobre os operadores em questão.

Teorema 3.2.21 (Lockett [34])**.** *Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting. Se $\mathfrak{F}$ for fechada sobre algum dos operadores Q, R_0 ou S_F, então $\mathfrak{F}$ é uma classe de Lockett.*

Demonstração. Seja $G \in \mathfrak{F}^*$ e suponhamos que $\mathrm{R}_0\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. De forma a fazer uso desta propriedade, ponhamos $N = (G_\mathfrak{F} \times G_\mathfrak{F} \times G_\mathfrak{F}) \langle (g^{-1}, g, g) : g \in G \rangle$. Pelo lema 3.2.2, $N \trianglelefteq D = G \times G \times G$. Consideremos as projecções de N nos subgrupos $G \times 1 \times G$ e $G \times G \times 1$, que designamos por π_1 e π_2, respectivamente. Sai que $\mathrm{Im}(\pi_1) = \mathrm{Im}(\pi_2) = (G_\mathfrak{F} \times G_\mathfrak{F}) \langle (g^{-1}, g) : g \in G \rangle$ e é fácil de perceber que $\ker(\pi_1) = (1 \times G_\mathfrak{F} \times 1)$ e $\ker(\pi_2) = (1 \times 1 \times G_\mathfrak{F})$. Portanto $N/(1 \times G_\mathfrak{F} \times 1)$ e $N/(1 \times 1 \times G_\mathfrak{F})$ são ambos isomorfos a $(G_\mathfrak{F} \times G_\mathfrak{F}) \langle (g^{-1}, g) : g \in G \rangle \in \mathfrak{F}$, pelo lema 3.2.1 ($b$). Logo $N/(1 \times G_\mathfrak{F} \times 1), N/(1 \times 1 \times G_\mathfrak{F}) \in \mathfrak{F}$. Como $(1 \times G_\mathfrak{F} \times 1) \cap (1 \times 1 \times G_\mathfrak{F}) = 1$ e $\mathrm{R}_0\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, vem $N \in \mathfrak{F}$ e concluímos também que $N \leqslant D_\mathfrak{F}$. Ora, $D_\mathfrak{F}$ contém $(G \times G \times 1)_\mathfrak{F}$ e fazendo a identificação com $(G \times G)_\mathfrak{F}$, temos pelo lema 3.2.1 (b) que $(g, g^{-1}, 1) \in D_\mathfrak{F}$, para cada $g \in G$. Concluímos que, para qualquer $g \in G$, $(g^{-1}, g, g)(g, g^{-1}, 1) = (1, 1, g) \in D_\mathfrak{F}$. Donde $G \simeq (1 \times 1 \times G) \in \mathrm{S}_n\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, como queríamos.
Suponhamos que $\mathfrak{F}$ é uma classe de Fischer ($\mathrm{S}_F\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$) e seja $G \in \mathfrak{F}^*$. Pelo lema 3.2.1 $H = (G_\mathfrak{F} \times G_\mathfrak{F}) \langle (g, g^{-1}) : g \in G \rangle \in \mathfrak{F}$. Para cada $g \in G$, seja $K(g) = (G_\mathfrak{F} \times 1) \langle (g, g^{-1}) \rangle$. Temos que $G_\mathfrak{F} \times 1 \trianglelefteq H \in \mathfrak{F}$ e $K(g)/(G_\mathfrak{F} \times 1) \simeq \langle (g, g^{-1}) \rangle / (G_\mathfrak{F} \times 1) \cap \langle (g, g^{-1}) \rangle$ é nilpotente. Logo $K(g) \in \mathfrak{F}$, usando a condição (b) da definição 2.1.5. Para além disso:

$$(G_\mathfrak{F} \times 1) \langle (g, 1) \rangle \trianglelefteq K(g) \langle (1, g) \rangle \; \mathrm{N}_0\mathfrak{F} = \mathfrak{F}. \qquad (\alpha)$$

Então, pelo facto de $(G \times 1)/(G_\mathfrak{F} \times 1)$ ser abeliano (lema 3.2.2), sai que $G \times 1$ é gerado pelos subgrupos $(G_\mathfrak{F} \times 1) \langle (g, 1) \rangle$ (pertencentes a $\mathfrak{F}$, por (α)), com g a percorrer G. Logo $G \simeq G \times 1 \in \mathrm{N}_0\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Concluímos que $G \in \mathfrak{F}$, donde $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$, como queríamos. □

3.3 As operações de Lockett no produto de Fitting

Nas próximas proposições pretendemos estudar o efeito da operação estrela para cima de Lockett no produto de Fitting. A questão que surge naturalmente é a de saber se dadas duas classes de Fitting $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$:

$$(\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^* = \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}^*$$

Embora não o façamos aqui, a resposta a esta pergunta é negativa podendo ser construídas classes de Fitting $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ tais que $(\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G})^* \nsubseteq \mathfrak{F}^*\diamond\mathfrak{G}^*$ e $\mathfrak{F}^*\diamond\mathfrak{G}^* \nsubseteq (\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G})^*$.[22]

Proposição 3.3.1 (Hauck [25]). *Sejam $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ classes de Fitting. Então temos:*

(a) $(\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}^*)^* = (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^*$;

(b) Se $\mathfrak{F}$ for uma classe de Lockett, então $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}^* = (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^*$.

Demonstração. (a) Por $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{G}^*$, sai imediatamente da definição que $\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}^*$. Podemos então recorrer ao teorema 3.2.18 apelando a cada uma das inclusões anteriores. Seja $G \in \mathfrak{E}$ e ponhamos $\overline{G} = G/G_{\mathfrak{F}}$. Pelo teorema 3.2.18 temos que $\overline{G}_{\mathfrak{G}^*}/\overline{G}_{\mathfrak{G}} \leqslant Z(\overline{G}/\overline{G}_{\mathfrak{G}})$ e portanto pela proposição 5.2 juntamente com os teoremas do isomorfismo vem que $G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}^*}/G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}} \leqslant Z(G/G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}})$. Novamente por 3.2.18 vem que $(\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}^*)^* = (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^*$.
(b) Suponhamos que $\mathfrak{F}$ é uma classe de Lockett e seja $G \in \mathfrak{E}$. Como $\mathfrak{G}^*$ é uma classe de Lockett podemos utilizar o teorema 3.2.7 em simultâneo com a proposição 2.2.2 para obter o seguinte:

$$\begin{aligned}
(G \times G)_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}^*}/(G \times G)_{\mathfrak{F}} &= ((G \times G)/(G_{\mathfrak{F}} \times G_{\mathfrak{F}}))_{\mathfrak{G}^*} \\
&\simeq ((G/G_{\mathfrak{F}}) \times (G/G_{\mathfrak{F}}))_{\mathfrak{G}^*} \\
&= (G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}^*}/G_{\mathfrak{F}}) \times (G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}^*}/G_{\mathfrak{F}}) \\
&\simeq (G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}^*} \diamond G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}^*})/(G_{\mathfrak{F}} \times G_{\mathfrak{F}}) \\
&= (G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}^*} \diamond G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}^*})/(G \times G)_{\mathfrak{F}}
\end{aligned}$$

Daqui concluímos que $(G \times G)_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}^*} = G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}^*} \diamond G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}^*}$ e portanto $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}^* = (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}^*)^*$. Utilizando a alínea anterior vem que $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}^* = (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^*$, como queríamos. □

Dadas duas classes de Fitting, $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$, tais que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$. Considerando a seguinte propriedade:

$$G' \cap G_{\mathfrak{F}^*} \leqslant G_{\mathfrak{F}}, \text{ para cada } G \in \mathfrak{G}, \tag{β}$$

mostramos o seguinte

Teorema 3.3.2 (Hauck [25]). *Sejam $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ classes de Fitting.*

(a) Se o as classes de Fitting $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$ satisfazem a equação (β) acima, então $\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}^*\diamond\mathfrak{G}$. Se para além disso (β) for também satisfeita pelo par $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*\diamond\mathfrak{G}$ e $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}$, então $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G} = \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{F}$;

(b) Se $\langle \mathrm{Q}, \mathrm{E}_Z \rangle\, \mathfrak{G} = \mathfrak{G}$, então $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G} = \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}$;

[22] Vide por exemplo Doerk and Hawkes [15], X.6.17

(c) Se $\langle \mathrm{Q}, \mathrm{E}_Z \rangle \mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}^*$ *ou* $\langle \mathrm{Q}, \mathrm{E}_Z \rangle \mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}^*$*, então* $(\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^* = \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}^*$.

Demonstração. (a) Suponhamos que o par $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$ satisfaz a condição (β) e, com vista a uma contradição, suponhamos também que $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G} \nsubseteq \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}$. Tome-se um grupo $G \in \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G} \backslash \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}$ de ordem minimal. Ora, $G_{\mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}}$ é o único subgrupo maximal normal de G. Por hipótese, $G' \cap G_{\mathfrak{F}^*} \leqslant G_{\mathfrak{F}}$. Se tivessemos $G' = G$, então $G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}^*}$, contradizendo a escolha de G. Logo $G' \lneq G$ e G/G' possuindo um único subgrupo normal maximal é um p-grupo ciclíco para algum $p \in \mathbb{P}$. Temos que $G \notin \mathfrak{F}$, logo $p \in \mathrm{char}(\mathfrak{G})$ e pela observação (b) a seguir ao teorema 3.2.18, vem que $G/(G'G_{\mathfrak{F}}) \simeq (G/G')((G'G_{\mathfrak{F}})/G') \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{G}$. Para além disso, pela lei modular de Dedekind, $G'G_{\mathfrak{F}} \cap G_{\mathfrak{F}^*} = (G \cap G_{\mathfrak{F}^*})G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}$, a última das igualdades por hipótese. Como $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{G}$ $(G \in \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})$, aplicando o lema quasi-R_0 a $G/G_{\mathfrak{F}}$, vem que $G/G_{\mathfrak{F}^*} \in \mathfrak{G}$ e portanto $G \in \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}$, uma contradição. Podemos então concluir que $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}$. A última parte da afirmação (a) decorre da aplicação de um argumento análogo, mas agora ao par de classes de Fitting $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}$.
(b) Seja $G \in \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$. Então $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{G}$ e portanto $G/G_{\mathfrak{F}^*} \simeq (G/G_{\mathfrak{F}})/(G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}}) \in \mathrm{Q}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Logo $G/G_{\mathfrak{F}^*} \in \mathfrak{G}$ e portanto $G \in \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}$. Donde concluímos $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}$. Para ver a outra inclusão, seja $G \in \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}$. Pelo teorema 3.2.18, $G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}} \leqslant Z(G/G_{\mathfrak{F}})$. Temos também que $(G/G_{\mathfrak{F}})(G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}}) \simeq G/G_{\mathfrak{F}^*} \in \mathfrak{G}$. Destas duas observações, podemos concluir que $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathrm{E}_Z\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$. Concluímos também que, $G \in \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$, o que prova a inclusão pretendida e portanto $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G} = \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}$, como queríamos.
(c) Se $\langle \mathrm{Q}, \mathrm{E}_Z \rangle \mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}^*$, pela alínea (b), sai que $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}^* = \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}^*$. Usando a alínea (a) da proposição 3.3.1, o facto anterior e a alínea (b) de 3.3.1, por esta ordem temos a seguinte cadeia de igualdades $(\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^* = (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}^*)^* = (\mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}^*)^* = \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}^*$. Suponhamos agora que $\langle \mathrm{Q}, \mathrm{E}_\Phi \rangle \mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}^*$. Pelo facto de $\mathfrak{G}^*$ ser Q-fechada, utilizando o mesmo argumento que o usado na alínea (b), mostra que $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}^* \subseteq \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}^*$. Aplicando a alínea (a) de 3.3.1, este facto e a alínea (b) de 3.3.1, por esta ordem, vem que $(\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^* = (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}^*)^* \subseteq (\mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}^*)^* = \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}^*$. Para verificar a outra inclusão, tomemos $G \in \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}^*$. Vejamos por indução na ordem de G, que $G \in (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^*$. Se $G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}} \leqslant \Phi(G/G_{\mathfrak{F}})$, como $(G/G_{\mathfrak{F}})/(G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}}) \simeq G/G_{\mathfrak{F}^*} \in \mathfrak{G}^*$, vem que $G/G_{\mathfrak{F}^*} \in \mathrm{E}_\Phi\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}^*$, como pretendido. Se $G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}} \nleqslant \Phi(G/G_{\mathfrak{F}})$, pelas propriedades do subgrupo de Frattini, existe um subgrupo $N \lneq G$ de tal forma que $G/G_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}})(N/G_{\mathfrak{F}})$. Pela alínea (b) do teorema 3.2.18, sai que $[G_{\mathfrak{F}^*}, \mathrm{Aut}(G)] \leqslant G_{\mathfrak{F}}$, donde $[G_{\mathfrak{F}^*}, G] \leqslant G_{\mathfrak{F}}$ e portanto $[G_{\mathfrak{F}^*}, N] \leqslant G_{\mathfrak{F}} \leqslant N$. Concluímos que $N_G(N) \geqslant G_{\mathfrak{F}^*}$ e como $N_G(N) \geqslant N$, vem $N_G(N) = G$, ou seja, $N \lhd G$. Por indução $N \in (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^*$ e como $\mathfrak{F}^* \subseteq (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^*$, vem que $G = G_{\mathfrak{F}^*}N \in \mathrm{N}_0((\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^*) = (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^*$, como pretendido. Portanto temos a outra inclusão e logo a igualdade. □

Teorema 3.3.3 (Hauck [25]). *Dadas* $\mathfrak{F}$ *e* $\mathfrak{G}$ *classes de Fitting, com* $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}^*$*, se*

$\langle \mathrm{Q}, \mathrm{E}_Z \rangle\, \mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}^*$ ou $S_F \mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}^*$, então $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}^* = (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^*$.[23]

Demonstração. Suponhamos que $\langle \mathrm{Q}, \mathrm{E}_Z \rangle\, \mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}^*$. Pelo que vimos no teorema 3.3.2 alínea (b), sai que $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}^* = \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}^*$. Por 3.3.2 ($c$), sai que $\mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}^* = (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^*$ e portanto a igualdade pretendida. Note-se que o facto de $\mathfrak{G}^*$ ser E_Z-fechada implica imediatamente que $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}^*$.
Suponhamos agora que $\mathrm{S}_F \mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}^*$. Por 3.3.1 ($a$), $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}^* \subseteq (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^*$. Com vista a uma contradição, suponhamos que $(\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^* \nsubseteq \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}^*$. Tomemos $G \in (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^* \backslash \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}^*$, de ordem minimal. Dado $H \in \mathfrak{F}^*$, pelo lema 3.2.2 $H' \leqslant H_{\mathfrak{F}}$, donde $H/H_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}^*$, a última das inclusões por hipótese. Daqui resulta que $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}^*$ e portanto:

$$G_{\mathfrak{F}} \leqslant G_{\mathfrak{F}^*} \leqslant G_{\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}^*} < G \in (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^*.$$

A escolha de G implica que $G_{\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}^*}$ é, de facto, o único subgrupo maximal normal de G. Como $G \in (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^*$, vem pelo lema 3.2.2 que $G/G_{\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}}$ é abeliano e portanto cíclico (usando argumentos já vistos). Ponhamos então $G/G_{\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}} = \langle a G_{\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}} \rangle$ $^{(1)}$ e $G \times G = D$. Pelo lema, 3.2.4 $D_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{F}} \times G_{\mathfrak{F}}) \langle (g, g^{-1}) : g \in G_{\mathfrak{F}^*} \rangle$ e por 3.2.1 com a obervação $^{(1)}$ acima, $D_{\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}} = (G_{\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}} \times G_{\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}}) \langle (a, a^{-1}) \rangle$. O grupo:

$$L = \frac{(1 \times G_{\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}}) \langle (a, a^{-1}) \rangle D_{\mathfrak{F}}}{D_{\mathfrak{F}}}$$

é uma extensão nilpotente de $(1 \times G_{\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}}) D_{\mathfrak{F}}/D_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq D_{\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}}/D_{\mathfrak{F}} = (D/D_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{G}^*$. Como a classe $\mathfrak{G}^*$ é S_F-fechada, vem que $L \in \mathfrak{G}^*$. Ora $\langle (a,1) \rangle D_{\mathfrak{F}}/D_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}$ e centraliza L. Como $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}^*$, o grupo $L(\langle (a,1) \rangle D_{\mathfrak{F}}/D_{\mathfrak{F}}) \in \mathrm{N}_0 \mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}^*$. Pelo facto de $(1 \times G) D_{\mathfrak{F}}/D_{\mathfrak{F}} = (1 \times G_{\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}}) \langle (1, a) \rangle D_{\mathfrak{F}}/D_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq L(\langle (a,1) \rangle D_{\mathfrak{F}}/D_{\mathfrak{F}})$, vem $(1 \times G) D_{\mathfrak{F}}/D_{\mathfrak{F}} \in \mathrm{S}_n \mathfrak{G}^* = G^*$. Temos que $G/G_{\mathfrak{F}} \simeq (1 \times G)/(1 \times G) \cap D_{\mathfrak{F}} \simeq (1 \times G) D_{\mathfrak{F}}/D_{\mathfrak{F}}$, logo $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{G}^*$ e portanto $G \in \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}^*$, o que contradiz o suposto. Logo podemos concluir que $(\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^* \subseteq \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}^*$. □

Corolário. *(a) Nas condições de (a) do teorema anterior, $(\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^* \subseteq \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}^*$;*

(b) Nas condições de (b) do teorema anterior, $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$ é uma classe de Lockett.

Demonstração. (a) Por (a) do teorema anterior, sai que $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}$. Aplicando 3.3.1 ($b$), temos o pretendido.
(b) Por (b) do teorema anterior, vem que $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G} = \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}$. Como $\mathfrak{G}$ é Q-fechada, por 3.2.21 sai que $\mathfrak{G}$ é uma classe de Lockett e portanto $\mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G} = \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{G}^* = (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^*$. Sendo a última igualdade obtida, pela proposição 3.3.1 alínea (b). Logo $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G} = (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G})^*$, como queríamos. □

[23] De acordo com a observação (b) a seguir ao teorema 3.2.18, podíamos exigir equivalentemente $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}$.

Observação. Sai imediatamente do teorema e respectiva demonstração que o produto de Fitting de duas classes de Lockett, ainda é uma classe de Lockett.

A próxima proposição mostra-nos que se $\mathfrak{F}$ for Q-fechada, então $\mathfrak{F}_*$ herda parcialmente essa propriedade.

Teorema 3.3.4 (Doerk and Porta [16]). *Sejam $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ classes de Fitting, sendo $\mathfrak{F}$ Q-fechada. Se $G \in \mathfrak{F}_*$, então $G/G_{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{F}_*$.*

Demonstração. Como $\mathfrak{F}$ é Q-fechada, pelo corolário da proposição 3.2.17, vem que $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$ e portanto $Q\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^*$. Logo $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{G} \diamond \mathfrak{F}^*$, mas como $\mathfrak{G} \diamond \mathfrak{F}^* \subseteq (\mathfrak{G} \diamond \mathfrak{F}^*)^* = (\mathfrak{G} \diamond (\mathfrak{F}_*)^*)^*$ e por 3.3.1 (a), $(\mathfrak{G} \diamond (\mathfrak{F}_*)^*)^* = (\mathfrak{G} \diamond \mathfrak{F}_*)^*$, sai que $\mathfrak{F}^* \subseteq (\mathfrak{G} \diamond \mathfrak{F}_*)^*$. Aplicando 3.2.13 à inclusão anterior vem que $(\mathfrak{F}^*)_* \subseteq ((\mathfrak{G} \diamond \mathfrak{F}_*)^*)_*$. Por outro lado $(\mathfrak{F}^*)_* = \mathfrak{F}_*$ e $((\mathfrak{G} \diamond \mathfrak{F}_*)^*)_* \subseteq \mathfrak{G} \diamond \mathfrak{F}_*$. Podemos então concluir que $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{G} \diamond \mathfrak{F}_*$ e a afirmação do teorema sai imediatamente. □

Corolário (Cossey [13]). *Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting. Se $G \in \mathfrak{S}_*$. então $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}_*$.*

3.4 Injectores e Classes de Lockett

Os próximos dois resultados mais importantes desta secção (3.4.1 e 3.4.4), relacionam injectores e classes de Lockett e devem-se precisamente a F. P. Lockett. Durante esta secção, voltamos também a assumir que as classes e grupos tomados estão no universo $\mathfrak{S}$, dos grupos finitos e resolúveis. O primeiro resultado, como abaixo podemos ver, mostra-nos que para classes de Lockett também os injectores respeitam produtos directos.

Teorema 3.4.1 (Lockett [34]). *Sejam $\mathfrak{F}$ uma classe de Lockett e G_1, G_2 grupos. Se V é um $\mathfrak{F}$-injector de $G_1 \times G_2$, então $V = (V \cap G_1) \times (V \cap G_2)$. Em particular $V = V_1 \times V_2$, onde $V_1 \in Inj_{\mathfrak{F}}(G_1)$ e $V_2 \in Inj_{\mathfrak{F}}(G_2)$ e qualquer subgrupo desta forma é um $\mathfrak{F}$-injector de $G_1 \times G_2$.*

Demonstração. Tomemos V um $\mathfrak{F}$-injector de $G_1 \times G_2$ e ponhamos $W = (V \cap G_1) \times (V \cap G_2) = V_1 \times V_2$. Temos que $W \trianglelefteq V \in \mathfrak{F}$. Suponhamos com vista a um absurdo que $V \nleq W$. Sejam E_1 e E_2 as projecções de E em G_1 e G_2, respectivamente. Tomemos $e_1, e_1' \in E_1$ arbitrários e escolhamos $e_2, e_2' \in E_2$ de tal forma que $(e_1, e_2), (e_1', e_2') \in E$. Ora, E/W é abeliano, donde $[(e_1, e_2), (e_1', e_2')] =$

$([e_1, e_1'], [e_2, e_2']) \in W$ e portanto $[e_1, e_1'] \in V_1$. Daqui vem que $[E_1, E_1] \leqslant V_1$. Logo E_1/V_1 é abeliano e da mesma forma, E_2/V_2 também o é. Concluímos que $(E_1 \times E_2)/W$ é abeliano. Como $E \trianglelefteq \trianglelefteq V \in \mathfrak{F}$, vem que $E \in \mathfrak{F}$ e portanto $E \leqslant (E_1 \times E_2)_{\mathfrak{F}} = (E_1)_{\mathfrak{F}} \times (E_2)_{\mathfrak{F}}$, sendo que a igualdade vem pelo teorema 3.2.7. Pelo facto de, para cada $i \in \{1, 2\}$, V_i ser um $\mathfrak{F}$-injector de G_i, V_i é $\mathfrak{F}$-maximal em G_i. Donde $V_i = (E_i)_{\mathfrak{F}}$ $(i = 1, 2)$. Daqui sai que $E \leqslant (V_1 \times V_2) = W$, o que é absurdo. Logo $D = V$. As conclusões finais deste teorema seguem da observação (a) a seguir à definição 2.3.1. $\square$

O próximo lema e o próximo teorema serão auxiliares na demonstração de um teorema devido a Lockett, que nos permite perceber que os $\mathfrak{F}$-injectores e os $\mathfrak{F}^*$-injectores de um grupo mantêm uma relação próxima.

Lema 3.4.2. *Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting e G um grupo. Se V é um $\mathfrak{F}^*$-injector de G e $W \leqslant V$ é um $\mathfrak{F}$-injector de G então $W = V_{\mathfrak{F}}$.*

Demonstração. Seja G um grupo e V $\mathfrak{F}^*$-injector de G e suponhamos que $W \leqslant V$ é um $\mathfrak{F}$-injector de G. Pelo teorema 2.3.6, W é um $\mathfrak{F}$-injector de V e portanto $V_{\mathfrak{F}} \leqslant W$. Por 3.2.11 $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{A}$, donde $V/V_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{A}$ e logo qualquer subgrupo entre $V_{\mathfrak{F}}$ e V é normal em V. Daqui concluímos que $W \trianglelefteq V$ e vem que $W \leqslant V_{\mathfrak{F}}$ e portanto a igualdade pretendida. $\square$

O teorema que apresentamos de seguida será dado sem demonstração.

Teorema 3.4.3 (Fischer, cf. Lockett [33])**.** *Sejam $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting, V um $\mathfrak{F}$-injector dum grupo G e N um subgrupo normal de G tal que $G/N \in \mathfrak{N}$ e $N_{\mathfrak{F}}$ é $\mathfrak{F}$-maximal em N. Então existe um sistema de Hall de G, digamos Σ, tal que $V = (N_{\mathfrak{F}} N_G(\Sigma))_{\mathfrak{F}}$. Mais, esta igualdade dá-se para o normalizador de qualquer sistema de Hall que se reduza a V.*

Teorema 3.4.4 (Lockett [34])**.** *Sejam $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting e G um grupo. Se V^* é um $\mathfrak{F}^*$-injector de G, então $(V_{\mathfrak{F}})^*$ é um $\mathfrak{F}$-injector de G.*

Demonstração. Sejam $\mathfrak{F}$, V^* e G, como na hipótese do teorema. Pelo lema anterior, basta-nos ver que V^* contém um $\mathfrak{F}$-injector de G. Sejam $N \trianglelefteq \cdot\, G$ e Σ um sitema de Hall de G. Ponhamos $D = N_G(\Sigma)$. Pelo corolário de 3.2.9 e pelo teorema de Mann (1.4.2) juntamente com a conjugação dos injectores, sejam V e V^* os únicos $\mathfrak{F}$- e $\mathfrak{F}^*$-injectores de G, respectivamente, aos quais Σ se reduz. Então $W = V \cap N$ e $W^* = V^* \cap N$ são os únicos $\mathfrak{F}$- e $\mathfrak{F}^*$-injectores de N aos quais o sistema de Hall, $\Sigma \cap N$ de N se reduz. Suponhamos por hipótese de indução que, para um grupo H de ordem inferior à de G com sistema de Hall Ω, o $\mathfrak{F}$-injector de H ao qual Ω se reduz está contido no $\mathfrak{F}^*$-injector de H ao qual Ω se reduz. Logo, por indução $W \leqslant W^*$ e portanto $W = (W^*)_{\mathfrak{F}}$. Temos que $(W^*)_{\mathfrak{F}}$ *car* $W^* \trianglelefteq V^*$, logo $W \trianglelefteq V^*$ e como $W \trianglelefteq V$, vem $V, V^* \leqslant N_G(W)$. Por 3.2.9 V e V^* são $\mathfrak{F}$- e $\mathfrak{F}^*$-injectores, respectivamente de $N_G(W)$. Pelo corolário de 1.4.2, Σ reduz-se a $N_G(W)$ e portanto V e V^* são $\mathfrak{F}$- e $\mathfrak{F}^*$-injectores de $N_G(W)$ aos quais $\Sigma \cap N_G(W)$ se reduz. Se $W \ntrianglelefteq G$, por hipótese de indução vinha $V \leqslant V^*$, como queríamos. Podemos então supor $W \trianglelefteq G$. Donde, $W \trianglelefteq N$ e $W = N_{\mathfrak{F}}$. Apelando ao teorema anterior, vem que $V = (WD)_{\mathfrak{F}}$. Recorrendo novamente ao corolário de 1.4.2, D normaliza V^*. Como $W \leqslant V^*$, podemos concluir que V normaliza V^*. Ora, conforme o teorema 1.4.3, Σ reduz-se a VV^* e podemos supor $VV^* = G$. Assim sendo $V^* \trianglelefteq G$ e concluímos que $V \cap V^*$ é um $\mathfrak{F}$-injector de $V^* \in \mathfrak{F}^*$, portanto $V \cap V^* = (V^*)_{\mathfrak{F}}$. Pelo lema 3.2.2, V centraliza $V^*/(V \cap V^*)$, donde $V/(V \cap V^*) \trianglelefteq G/(V \cap V^*)$ e $V \trianglelefteq G$. Usando o facto de $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$, conjuntamente com $V, V^* \trianglelefteq G$, vem $V = G_{\mathfrak{F}} \leqslant G_{\mathfrak{F}^*} = V^*$, como queríamos . □

3.5 Classes de Fitting Normais

Como já tínhamos notado no início deste capítulo, para além do estudo do comportamento aberrante dos radicais relativamente ao produto directo, outro tipo de estudo, ainda no plano dos radicais, já tinha sido tomado. Em 1970, D. Blessenohl e W. Gaschütz [5] publicaram um artigo onde introduziram e exploraram esses primeiros conceitos. A propriedade que visavam nesse estudo, era a análise das classes de Fitting cujos injectores eram normais (classes de Fitting normais). Nesse sentido e mantendo ainda as classes e grupos tomados em $\mathfrak{S}$ (a não ser que o contrário seja dito), relembramos a seguinte definição, introduzida no ínicio do capítulo

Definição 3.5.1. Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting. Dizemos que $\mathfrak{F}$ é uma classe de Fitting normal se para qualquer grupo G, os seus $\mathfrak{F}$-injectores forem normais em G.

Tínhamos observado também que, dada uma classe de Fitting normal, $\mathfrak{F}$, sai imediatamente que cada grupo G possui um único $\mathfrak{F}$-injector, o seu radical $G_{\mathfrak{F}}$.
A proposição seguinte foi apresentada por Blessenohl e Gaschütz em [5] e dá-nos uma caracterização das classes de Fitting normais, que nos possibilita um tratamento muito mas acessível em termos práticos. A demonstração original apresenta alguma complexidade, envolvendo produtos em coroa, razão pela qual apenas demonstramos uma das implicações.

Teorema 3.5.1 (Blessenohl and Gaschütz [5]). *Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting. Então $\mathfrak{F}$ é uma classe de Fitting normal se e só se $G' \leqslant G_{\mathfrak{F}}$.*

Demonstração. Se $G' \leqslant G_{\mathfrak{F}}$, pelo facto de $G_{\mathfrak{F}}$ estar contido em cada $\mathfrak{F}$-injector de G, vem que cada $\mathfrak{F}$-injector de G é normal em G, e portanto $\mathfrak{F}$ é uma classe de Fitting normal. Para a outra implicação, ver Blessenohl and Gaschütz [5]. □

Corolário. *Dada $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting. $\mathfrak{F}$ é normal se e só se $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{A} = \mathfrak{S}$.*

Demonstração. $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{A} = \mathfrak{S}$ implica que $G' \leqslant G_{\mathfrak{F}}$ e portanto $\mathfrak{F}$ é normal. Suponhamos que $\mathfrak{F}$ é normal. Então para qualquer G, $G' \leqslant G_{\mathfrak{F}}$. Como $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}$. Seja $G \in \mathfrak{S}$. Então $G' \leqslant G_{\mathfrak{F}}$ e portanto $G \in \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{A}$. □

Teorema 3.5.2 (Lockett [34]). *Uma classe de Fitting $\mathfrak{F}$ é normal se e só se $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}$.*

Demonstração. Se $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}$, então $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}$, portanto $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{A} = \mathfrak{S}$ e usando o corolário anterior $\mathfrak{F}$ é normal. Suponhamos que para cada grupo G, $G' \leqslant G_{\mathfrak{F}}$ (equivalentemente $\mathfrak{F}$ é normal). Seja então $G \in \mathfrak{S}$ e ponhamos $S = (G \underset{\text{reg}}{\wr} C_2)$ $(C_2 = \langle i \rangle)$. Escrevendo em notação de justaposição vem:

$$[(g,1),i] = (g^{-1},1)i^{-1}(g,1)i = (g^{-1},1)\phi_i((g,1))i^2 =$$

$$(g^{-1},g) \in (G \times G) \cap S' \leqslant (G \times G) \cap S_{\mathfrak{F}} = (G \times G)_{\mathfrak{F}}$$

Sendo a última igualdade obtida por 1.5.4 (c). Daqui concluímos que para qualquer $g \in G$, $(g^{-1},g) \in (G \times G)_{\mathfrak{F}}$. Usando o lema 3.2.1 alínea $(b),(ii)$, vem que $G \in \mathfrak{F}^*$, como queríamos. □

Como corolário desta proposição, sai o seguinte

Teorema 3.5.3 (Blessenohl and Gaschütz [5]). *Seja $\{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ um conjunto de classes de Fitting normais. Então $\bigcap_{\alpha \in A} \mathfrak{F}_\alpha$ é uma classe de Fitting normal.*

Demonstração. Resulta do teorema anterior, juntamente com a proposição 3.2.10.
□

Observação. Analisando o teorema 3.2.12, sai imediatamente que dadas duas classes de Fitting $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$, $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F}) = \{\mathfrak{G} : \mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}^*\}$. Tendo em conta esta observação e ainda à luz de 3.2.12, podemos deduzir que $\mathfrak{F}$ é normal se e só se $\mathfrak{F} \in \mathrm{Locksec}(\mathfrak{S})$. Este facto mostra-nos que as classes de Fitting normais fazem parte da teoria previamente estudada, construída por Lockett. A menor classe de Fitting normal é denotada em termos históricos como $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_*$.

Teorema 3.5.4. *Se $\mathfrak{F}$ for uma classe de Fitting normal, então $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$.*

Demonstração. Pelo teorema 3.5.2, $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}$. Utilizando a proposição 3.2.17, vem que $\mathrm{char}(\mathfrak{F}) = \mathrm{char}(\mathfrak{S}) = \mathbb{P}$. Pelo teorema 3.2.16, sai o resultado pretendido. □

A próxima proposição relaciona-nos as classes de Fitting normais e o respectivo produto de Fitting.

Proposição 3.5.5 (Cossey [13]). *Sejam $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ classes de Fitting. Se alguma das classes $\mathfrak{F}$ ou $\mathfrak{G}$ for normal, então $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$ é normal.*

Demonstração. A demonstração deste teorema apela sistematicamente ao teorema 3.5.1, de tal forma não o citaremos aquando da sua utilização. Sejam $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ classes de Fitting. Se $\mathfrak{F}$ for normal, então $G' \leqslant G_{\mathfrak{F}} \leqslant G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}}$ e concluímos que $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$ é normal. Se $\mathfrak{G}$ for normal, então $G'G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}} = (G/G_{\mathfrak{F}})' \leqslant (G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{G}} = G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}}/G_{\mathfrak{F}}$, donde $G' \leqslant G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{G}}$ e portanto $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$ é normal, como queríamos. □

Antes de terminarmos esta secção, introduzimos uma definição que generaliza o conceito de normalidade que temos vindo a estudar. Fazemos também algumas observações.

Definição 3.5.2. Sejam $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ classes de Fitting, tomadas no universo $\mathfrak{E}$. Dizemos que $\mathfrak{F}$ *é normal em* $\mathfrak{G}$, ou abreviadamente, $\mathfrak{F}$ *é* $\mathfrak{G}$*-normal*, se:

(a) $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$;

(b) $G_{\mathfrak{F}}$ é $\mathfrak{F}$-maximal em G, para cada $G \in \mathfrak{G}$.

No capítulo seguinte, a partir de uma classe de Fitting $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}$, contruímos uma classe de Fitting $\mathfrak{F}$-normal.

Observações. (a) Dada uma classe de Fitting $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ o conceito de normalidade que estudámos neste capítulo é equivalente a $\mathfrak{F}$ ser $\mathfrak{S}$-normal;

(b) Trabalhos posteriores, nomeadamente o iniciado por H. Laue, mostraram que os resultados apresentados se extendem ao caso da normalidade mais geral agora definido.

Capítulo 4

O Grupo de Lausch

Nesta secção, a menos que referido, todas as classes consideradas estão contidas na classe $\mathfrak{E}$, dos grupos finitos. Da mesma forma todos os grupos considerados serão finitos.
Dada uma classe de Fitting $\mathfrak{F}$, conforme o teorema 3.2.12 e como o observado a seguir ao teorema 3.5.3, as classes de Fitting que se encontram entre $\mathfrak{F}_*$ e $\mathfrak{F}^*$ compõem o reticulado que designámos atrás como secção de Lockett de $\mathfrak{F}$.
H. Lausch [31] construiu engenhosamente um grupo abeliano (grupo de Lausch, $\Lambda(\mathfrak{F})$), cujo reticulado de subgrupos provou ser isomorfo ao reticulado de Lockett. Apesar desta construção ter sido pensada no universo $\mathfrak{S}$, conforme observaram Bryce e Cossey em [9], a construção ainda é válida para o caso finito. Pelo que foi dito, reparamos então que o estudo do grupo de Lausch é uma ferramenta importante para o estudo da secção de Lockett, especialmente porque é possivel determinar a sua estrutura para uma grande variedade de classes de Fitting.
Esta questão será tratada mais adiante, aquando da apresentação do trabalho desenvolvido por Berger. Para já concentramo-nos no grupo de Lausch. Com esse objectivo em mente e antes de procedermos à apresentação dos resultados em si, precisamos primeiro de introduzir algumas definições.

4.1 Construção e algumas definições

Fixe-se um conjunto $\mathscr{E}$, que contém um único representante de cada classe de isomorfismo de grupos finitos. Ou seja, tal que para cada $G \in \mathfrak{E}$, exista um único $G_0 \in \mathscr{E}$ de tal forma que $G \simeq G_0$.

Definição 4.1.1. (a) Para cada classe de grupos $\mathfrak{F}$, definimos $\mathscr{F} = \mathfrak{F} \cap \mathscr{E}$, a que chamamos, *conjunto fundamental de* $\mathfrak{F}$;

(b) Dados G e H grupos, dizemos que $\alpha : G \to H$ é uma *imersão subnormal* (respectivamente, normal), se α for um monomorfismo, de tal forma que

$\alpha(G) \trianglelefteq\trianglelefteq H$ (respectivamente, $\alpha(G) \trianglelefteq H$).

Dados G e H grupos, notamos por Subnemb(G, H) (respectivamente, Nemb(G, H)), o conjunto de todas as imersões subnormais de G em H (respectivamente, o conjunto de todas as imersões normais). Por vezes usaremos a notação $G\ isn\ H$, para referir que G é isomorfo a um subgrupo subnormal de H, ou seja, que Subnemb$(G, H) \neq \emptyset$.
Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting e H um grupo (não necessariamente finito), notamos por Hom$(\mathscr{F}, H)$, o conjunto de todos os homomorfismos $\phi : G \to H$, onde $G \in \mathscr{F}$, ou seja, Hom$(\mathscr{F}, H) = \bigcup\{\text{Hom}(G, H) : G \in \mathscr{F}\}$.

Definição 4.1.2 (Blessenohl and Gaschütz [5]; Bryce and Cossey [9])**.** Seja $\mathfrak{F}$, uma classe de Fitting. Designamos por *par de Fitting de* $\mathfrak{F}$, um par (A, d), tal que A é um grupo abeliano (não necessariamente finito) e $d : \mathscr{F} \to \text{Hom}(\mathscr{F}, A)$ é uma aplicação que satisfaz as seguintes condições:

(i) $d_G = (G)d \in$ Hom(G,A), $G \in \mathscr{F}$;

(ii) $d_G = \alpha \circ d_H$, para cada $G, H \in \mathscr{F}$ e para qualquer $\alpha \in$ Nemb(G, H);

(iii) $A = \{(g)d_G : G \in \mathscr{F}, g \in G\}$.[24]

O alcance da aplicação d, acima definida pode ser aumentado. Tendo presente esse objectivo, reparamos que, se $G \in \mathfrak{F}$ e $\phi : G \to G_0$ é um isomorfismo, com $G_0 \in \mathscr{F}$, podemos definir $d_G = \phi \circ d_{G_0}$. Repare-se que esta definição é independente da escolha do isomorfismo de G para G_0, pois tomando $\gamma : G \to G_0$ um outro isomorfismo, temos que $\phi^{-1}\gamma \in$ Nemb(G_0, G_0) e recorrendo à propriedade (ii) acima, vem $\phi \circ d_{G_0} = \phi \circ ((\phi^{-1} \circ \gamma) \circ d_{G_0}) = \gamma \circ d_{G_0}$. Desta forma, quando necessário podemos assumir que d_G está definido para $G \in \mathfrak{F}$.
A partir da definição acima exibida, Blessenohl e Gaschütz contruíram uma classe de Fitting, como vemos de seguida.

Construção (Blessenohl and Gaschütz [5])**.** Sejam $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting e (A, d) um par de Fitting de $\mathfrak{F}$. Construímos a seguinte classe associada a $\mathfrak{F}$:

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(A, d) = (G \in \mathscr{F} : (G)d_G = 1)\,.$$

A classe acima apresentada é uma classe de Fitting.

[24] Um *par de Fitting normal* é um par de Fitting de $\mathfrak{S}$.

Demonstração. Vejamos que $\mathfrak{X}$ é S_n-fechada: Seja $G \in \mathfrak{X}$ e tomemos $N \trianglelefteq G$. Como $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, existem $\widetilde{N}, \widetilde{G} \in \mathscr{F}$, tais que $N \simeq \widetilde{N}$ e $G \simeq \widetilde{G}$. Pelo facto de $N \trianglelefteq G$, existe $\alpha \in \mathrm{Nemb}(\widetilde{N}, \widetilde{G})$. Fazendo uso da propriedade (ii) da definição anterior, vem que:

$$(\widetilde{N})d_{\widetilde{N}} = (\widetilde{N})\alpha \circ d_{\widetilde{G}} = ((\widetilde{N})\alpha)d_{\widetilde{G}} \leqslant (\widetilde{G})d_{\widetilde{G}} = 1.$$

Logo $\widetilde{N} \in \mathfrak{X}$ e como $N \simeq \widetilde{N}$, vem que $N \in \mathfrak{X}$. Concluímos que $\mathrm{S}_n\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$.
Um raciocínio análogo permite-nos verificar que $\mathfrak{X}$ é N_0-fechada: tomemos $G = N_1N_2$, com $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ e $N_1, N_2 \in \mathfrak{X}$. Novamente pelo facto de $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, vem que $N_1, N_2, G \in \mathfrak{F}$. Portanto existem $\widetilde{N}_1, \widetilde{N}_2, \widetilde{G} \in \mathscr{F}$, tais que $N_1 \simeq \widetilde{N}_1$, $N_2 \simeq \widetilde{N}_2$ e $G \simeq \widetilde{G}$. Para além disso, existem também $\alpha_1 \in \mathrm{Nemb}(\widetilde{N}_1, \widetilde{G})$ e $\alpha_2 \in \mathrm{Nemb}(\widetilde{N}_2, \widetilde{G})$, tais que $\widetilde{G} = (\widetilde{N}_1)\alpha_1(\widetilde{N}_2)\alpha_2$. Usando (ii) da definição anterior vem:

$$(\widetilde{G})d_{\widetilde{G}} = ((\widetilde{N}_1)\alpha_1(\widetilde{N}_2)\alpha_2)d_{\widetilde{G}} = (\widetilde{N}_1)d_{\widetilde{N}_1}(\widetilde{N}_2)d_{\widetilde{N}_2} = 1.$$

Ora, $G \simeq \widetilde{G} \in \mathfrak{X}$, portanto $G \in \mathfrak{X}$ e $\mathrm{N}_0\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, como pretendido. □

Proposição 4.1.1. *Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting e (A, d) um par de Fitting de $\mathfrak{F}$. Se $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(A, d)$ for a classe acima construida e $G \in \mathscr{F}$, então:*

(a) $G_{\mathfrak{X}} = \ker(d_G)$;

(b) $[G, \mathrm{Aut}(G)] \leqslant G_{\mathfrak{X}}$;

(c) $G/G_{\mathfrak{X}}$ *é abeliano;*

(d) $G_{\mathfrak{X}}$ *é $\mathfrak{X}$-maximal em G;*

(e) $G_{\mathfrak{X}}$ *é o único $\mathfrak{X}$-injector de G.*

Demonstração. (a) : Seja $G \in \mathscr{F}$ e ponhamos $K = \ker(d_G)$. Então, existem $\widetilde{K} \in \mathscr{F}$ e $\alpha \in \mathrm{Nemb}(\widetilde{K}, G)$ tais que $(\widetilde{K})\alpha = K$. Ora, pela propriedade (ii) da definição 4.1.2:

$$(\widetilde{K})d_{\widetilde{K}} = (\widetilde{K})\alpha \circ d_G = ((\widetilde{K})\alpha)d_G = (K)d_G = 1.$$

Concluímos, desta forma que $K \in \mathfrak{X}$ e portanto $K \leqslant G_{\mathfrak{X}}$.
(b): Sendo $G \in \mathscr{F}$ e $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, em particular, $\alpha \in \mathrm{Nemb}(G, G)$ e portanto por (i) da definição 4.1.2 vem que, dado $g \in G$, $(g)d_G = ((g)\alpha)d_G$. Logo, como $gg^{-1} = 1 \in \ker(d_G)$, na notação corrente, $[g, \alpha] = g^{-1}(g)\alpha \in \ker(d_G) = G_{\mathfrak{X}}$ e portanto $[G, \mathrm{Aut}(G)] \leqslant G_{\mathfrak{X}}$, como pretendido. As asserções (c), (d) e (e) são consequências directas de (b). □

Portanto a partir de uma classe de Fitting $\mathfrak{F}$ e um par de Fitting de $\mathfrak{F}$, (A, d), podemos construir uma classe de Fitting $\mathfrak{F}$-normal, nomeadamente, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(A, d)$.

Mais, introduzindo a seguinte

Definição 4.1.3 (Bryce and Cossey [9]). Sejam $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ classes de Fitting. Dizemos que $\mathfrak{F}$ é fortemente normal em $\mathfrak{G}$ se:

(a) $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$;

(b) $[G, \mathrm{Aut}(G)] \leqslant G_{\mathfrak{F}}$, para cada $G \in \mathfrak{G}$.

Sai o seguinte

Corolário. *De acordo com o suposto na proposição 4.1.1, $\mathfrak{X}$ é fortemente normal em $\mathfrak{F}$.*

Repare-se que a definição acima generaliza o conceito de normalidade definido no final do capítulo anterior. Portanto a partir deste corolário podemos concluir que cada par de Fitting dá origem a uma classe de Fitting normal. Utilizando os teoremas 3.2.12 e 3.2.18 sai o seguinte

Corolário. *Sendo $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ classes de Fitting, $\mathfrak{F}$ é fortemente normal em $\mathfrak{G}$ se e só se $\mathfrak{G}_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}^*$ (se e só se $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}^*$).*

Antes de avançarmos com mais teoria, fazemos primeiro algumas observações e introduzimos também alguma notação.

Observações. (a) Na definição 4.1.2, a exigência no par de Fitting (A, d), para que A seja abeliano, não é um axioma independente, mas apenas uma consequência de (ii) e (iii) da mesma definição;

(b) A condição (ii) da definição 4.1.2 é equivalente à seguinte condição:

$$(ii)^* \; d_G = \alpha \circ d_H, \text{ para cada } G, H \in \mathscr{F} \text{ e qualquer } \alpha \in \mathrm{Subnemb}(G, H),$$

pelo que podemos utilizar uma ou outra, conforme for mais conveniente.

Demonstração. (a): Sejam $x, y \in A$. Pela definição de A, existem $g \in G \in \mathscr{F}$ e $h \in H \in \mathscr{F}$, tais que $x = (g)d_G$ e $y = (h)d_H$. Sejam $D \in \mathscr{F}$ tal que $D \simeq G \times H$ e α, β isomorfismos de G e H, respectivamente, tais que $(G)\alpha \times (H)\beta = D$. Fazendo uso da propriedade (ii) da definição 4.1.2 vem:

$$\begin{aligned} [x, y] &= [(g)d_G, (h)d_H] = [(g)\alpha \circ d_G, (h)\alpha \circ d_H] \\ &= [(g)\alpha, (h)\alpha]d_D = (1)d_D = 1. \end{aligned}$$

(b): É óbvio que (ii)* implica (ii). Suponhamos que a condição (ii) é válida e seja $\alpha \in \mathrm{Subnemb}(G, H)$. Então existe uma série subnormal:

$$(G)\alpha \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = H.$$

Ora, cada H_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ sendo subnormal em $H \in \mathfrak{F}$, também pertence a $\mathfrak{F}$. Logo, existem $G_1 = G, G_2 \ldots, G_n = H \in \mathscr{F}$ e $\alpha_i \in \mathrm{Nemb}(G_i, G_{i+1})$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, tais que $\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \cdots \circ \alpha_{n-1}$. Pelo facto de $d_{G_i} = \alpha_i \circ d_{G_{i+1}}$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, utilizando o suposto, vem:

$$d_G = d_{G_1} = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \cdots \circ \alpha_{n-1} \circ d_H = \alpha \circ d_H,$$

como pretendido. $\square$

Notação. Sendo $\{G_\lambda\}_{\lambda \in I}$ um conjunto de grupos, o produto directo restrito dos seus elementos,

$$D_I = \bigtimes_{\lambda \in I} G_\lambda$$

consite em todas as funções $f : I \to \bigcup_{\lambda \in I} G_\lambda$ de suporte finito, tais que $(\lambda)f \in G_\lambda$, para cada $\lambda \in I$. A operação do grupo é definida ponto a ponto, ou seja, $(\lambda)fg = (\lambda)f(\lambda)g$, para cada $\lambda \in I$.
Se $J \subseteq I$ e $D_J = \bigtimes_{\mu \in J} G_\mu$, denotamos a imersão natural de D_J em D_I, por $\varepsilon_J : D_J \to D_I$, que a cada elemento $\tilde{f}$ de D_J faz corresponder o seguinte elemento $f \in D_I$:

$$(\nu)f = \begin{cases} (\nu)\tilde{f} & \text{se } \nu \in J, \\ 1 & \text{se } \nu \notin J. \end{cases}$$

Se $J = \{\mu\}$, pomos $G = G_\mu$ e ε_G denota a imersão natural de $G = D_J$ em D_I. Note-se que, ε_J é claramente uma imersão normal de D_J em D_I.

Para podermos introduzir o grupo de Lausch, precisamos ainda de definir algumas estruturas e de um pequeno lema.

Definição 4.1.4. Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting. Definimos:

$$\Delta(\mathfrak{F}) = \bigtimes_{G \in \mathscr{F}} G,$$

o produto directo restrito de todos os grupos de $\mathscr{F}$.
Para além disso, definimos também o seguinte subgrupo de $\Delta(\mathfrak{F})$:

$$\Gamma(\mathfrak{F}) = \left\langle (g^{-1})\varepsilon_G (g)\alpha \circ \varepsilon_H : G, H \in \mathscr{F}, g \in G \text{ e } \alpha \in \mathrm{Nemb}(G, H) \right\rangle.$$

Lema 4.1.2. *Se $\mathfrak{F}$ é uma classe de Fitting e $G \in \mathscr{F}$, então:*

$$([G, Aut(G)])\,\varepsilon_G \leqslant \Gamma(\mathfrak{F}),$$

em particular, $\Delta(\mathfrak{F})' \leqslant \Gamma(\mathfrak{F})$.

Demonstração. Suponhamos que $\mathfrak{F}$ é uma classe de Fitting e $G \in \mathscr{F}$. Seja $g \in G$ e $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$. Então $\alpha \in \mathrm{Nemb}(G, G)$ e portanto:

$$([g, \alpha])\,\varepsilon_G = (g^{-1})\varepsilon_G(g)\alpha \circ \varepsilon_G \in \Gamma(\mathfrak{F}),$$

por definição de $\Gamma(\mathfrak{F})$. Logo $([G, \mathrm{Aut}(G)])\,\varepsilon_G \leqslant \Gamma(\mathfrak{F})$. Ora,

$$((G)\,\varepsilon_G)' = (G')\,\varepsilon_G = ([G, G])\,\varepsilon_G \leqslant ([G, \mathrm{Aut}(G)])\,\varepsilon_G \leqslant \Gamma(\mathfrak{F}).$$

Como $\Delta(\mathfrak{F})'$ é gerado por $(G)\varepsilon_G$, quando G percorre $\mathscr{F}$, vem que $\Delta(\mathfrak{F})' \leqslant \Gamma(\mathfrak{F})$, como pretendido. □

Estamos agora em condições de poder introduzir o grupo de Lausch.

Definição 4.1.5. Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting. Definimos o *grupo de Lausch*, como sendo o quociente $\Delta(\mathfrak{F})/\Gamma(\mathfrak{F})$ e denotamo-lo por $\Lambda(\mathfrak{F})$.

Definição 4.1.6. Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting.

(a) Dado $G \in \mathscr{F}$, definimos o seguinte homomorfismo:

$$\begin{array}{rll} \delta_G : & G & \to \Lambda(\mathfrak{F}) \\ & g & \mapsto (g)\varepsilon_G\Gamma(\mathfrak{F}) \end{array}$$

a que damos o nome de *aplicação associada*.

(b) Tomando $G \in \mathfrak{F}$, uma *imersão quasi-natural* é um monomorfismo $e_G : G \to \Delta(\mathfrak{F})$, tal que $e_G = \phi \circ \varepsilon_{G_0}$, para algum isomorfismo $\phi : G \to G_0$, onde $G_0 \in \mathscr{F}$. Denotamos por $\mathrm{Qnat}(G, \Delta(\mathfrak{F}))$, o conjunto de todas as imersões quasi-naturais de G em Δ.

4.2 Resultados gerais

Teorema 4.2.1 (Lausch [31]). *Se $\mathfrak{F}$ for uma classe de Fitting, o par $(\Lambda(\mathfrak{F}), \delta)$ é um par de Fitting de $\mathfrak{F}$.*

Demonstração. Pelo que foi visto, temos apenas que verificar (i), (ii) e (iii) da definição 4.1.2. Pela definição 4.1.6 (a), $\delta_G \in \mathrm{Hom}(G, \Lambda(\mathfrak{F}))$, portanto (i) é satisfeita. Para vermos (ii), sejam $G, H \in \mathscr{F}$ e $\alpha \in \mathrm{Nemb}(G, H)$. Se $g \in G$, pela definição de $\Gamma(\mathfrak{F}) = \Gamma$, vem que $(g)\alpha \circ \varepsilon_H\Gamma = ((g^{-1})\varepsilon_G)^{-1}\Gamma = (g)\varepsilon_G\Gamma$. Donde:

$$(g)\delta_G = (g)\varepsilon_G\Gamma = (g)\alpha \circ \varepsilon_H\Gamma = ((g)\alpha)\delta_H = (g)\alpha \circ \delta_H$$

e portanto (ii) é satisfeita. É óbvio que $\Theta(\mathfrak{F}) = \{(g)\delta_G : G \in \mathscr{F}, g \in G\} = \{(g)\varepsilon_G\Gamma(\mathfrak{F}) : G \in \mathscr{F}, g \in G\}$ é igual a $\Lambda(\mathfrak{F})$. E portanto temos (iii), como queríamos. $\square$

Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting e (A, d) um par de Fitting de $\mathfrak{F}$. Se I for um conjunto de índices para os grupos de $\mathscr{F}$ (que é contável), podemos escrever

$$\Delta(\mathfrak{F}) = \bigtimes_{\lambda \in I} G_\lambda = \left\{ f : I \to \bigcup_{\lambda \in I} G_\lambda, (\lambda)f \in G_\lambda \right\}$$

Tendo esta ideia presente, podemos definir uma aplicação que irá ser útil, para passarmos de um par de Fitting para o grupo de Lausch.

Definição 4.2.1. Com a notação acima utilizada, definimos a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rccl} \hat{d}: & \Delta(\mathfrak{F}) & \longrightarrow & A \\ & f & \mapsto & \prod_{\lambda \in I} ((\lambda)f)d_{G_\lambda} \end{array}$$

a que damos o nome de *aplicação topo.*

Proposição 4.2.2. *Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting e (A, d) um par de Fitting de $\mathfrak{F}$. A aplicação $\hat{d}$ acima apresentada está bem definida. Para além disso satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) Se $G \in \mathscr{F}$ e $g \in G$, então $(g)d_G = ((g)\varepsilon_G)\hat{d}$;

(b) $\hat{d}$ é um epimorfismo de $\Delta(\mathfrak{F})$ para A, satisfazendo $\Gamma(\mathfrak{F}) \leqslant ker(\hat{d})$;

(c) $(ker(d_G))\varepsilon_G = ker(\hat{d}) \cap (G)\varepsilon_G$.[25]

Demonstração. O facto de f ter suporte finito, implica que $\hat{d}$ está bem definida. Mais, como A é abeliano, o produto é independente da ordem que tomamos. Com o intuito de provarmos (a), tomemos $g \in G \in \mathscr{F}$. Então $G = G_\lambda$, para algum

[25]De facto, podíamos ter tomado apenas $G \in \mathfrak{F}$ e utilizar e_G, em vez de ε_G, em (a) e em (c), obtendo o mesmo resultado.

$\lambda \in I$. O elemento $(g)\varepsilon_G$ de $\Delta(\mathfrak{F})$ é a função f tal que $(\lambda)f = g$ e $(\nu)f = 1$ para cada $\nu \in I \backslash \{\lambda\}$, como na definição de ε_G. Sai que $((g)\varepsilon_G)\hat{d} = ((\lambda)f)d_{G_\lambda} = (g)d_G$. Vejamos (b): o facto de $\hat{d}$ ser um morfismo vem d_{G_λ} o ser, para cada $\lambda \in I$. A sobrejectivadade sai da alínea anterior em conjunto com a alínea (iii) da definição 4.1.2. Para ver que $\Gamma(\mathfrak{F}) \leqslant \ker(\hat{d})$, tomemos $G, H \in \mathscr{F}$, $\alpha \in \mathrm{Nemb}(G,H)$ e $g \in G$. Então $(g^{-1})\varepsilon_G(g)\alpha \circ \varepsilon_H \in \Gamma(\mathfrak{F})$ e :

$$((g^{-1})\varepsilon_G(g)\alpha \circ \varepsilon_H)\hat{d} = (g^{-1})d_G(g)\alpha \circ d_H = 1$$

e portanto pertence a $\ker(\hat{d})$. Finalmente para verificarmos (c), basta ver que pela alínea (a), $(g)\varepsilon_G \in \ker(\hat{d})$ se e só se $g \in \ker(d_G)$ e temos o pretendido. □

Lema 4.2.3. *A definição de* $\Gamma(\mathfrak{F})$ *permanece inalterada substituindo o conjunto* $\mathrm{Nemb}(G,H)$*, por* $\mathrm{Subnemb}(G,H)$*.*

Demonstração. Uma das desigualdades é imediata. Para a outra, basta adaptarmos a demonstração da observação (b) a seguir à proposição 4.1.1.

Lema 4.2.4. *Tomemos* $\mathfrak{F}$ *uma classe de Fitting e* $G, H \in \mathscr{F}$*. Sejam também,* $K \trianglelefteq \trianglelefteq G$*,* $\alpha \in \mathrm{Subnemb}(K,H)$ *e* $x \in K$*. Então:*

(a) $(x)\varepsilon_G \equiv (x)\alpha \circ \varepsilon_H \pmod{\Gamma(\mathfrak{F})}$*;*

(b) se $G = H$*, então* $(K)\varepsilon_G \leqslant \Gamma(\mathfrak{F})$ *se e só se* $(K)\alpha \circ \varepsilon_H \leqslant \Gamma(\mathfrak{F})$*.*

Demonstração. (b) é consequência directa de (a). Basta-nos portanto provar (a). Nesse sentido, como $K \in \mathrm{S}_n\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, existe $L \in \mathscr{F}$ e $\beta \in \mathrm{Subnemb}(L,G)$ tal que $(L)\beta = K$. Então, se $x \in K$, $x = (y)\beta$, para algum $y \in L$. Como $((y)\varepsilon_L)^{-1}(x)\varepsilon_G = (y^{-1})\varepsilon_L(y)\beta \circ \varepsilon_G \in \Gamma(\mathfrak{F})$, utilizando a definição de $\Gamma(\mathfrak{F})$, conjuntamente com o lema anterior, vem que

$$(x)\varepsilon_G \equiv (y)\varepsilon_L \pmod{\Gamma(\mathfrak{F})}.$$

Mas $\beta \circ \alpha \in \mathrm{Subnemb}(L,H)$ e $(y)\beta \circ \alpha = (x)\alpha$, donde $(y)\varepsilon_L = (y)(\beta \circ \alpha) \circ \varepsilon_H = (x)\alpha \circ \varepsilon_H$. Portanto

$$(x)\varepsilon_G \equiv (x)\alpha \circ \varepsilon_H \pmod{\Gamma(\mathfrak{F})}$$

como queríamos concluir. □

4.3 Teoremas de Lausch no caso finito

Já tínhamos visto que um par de Fitting dava origem a uma classe de Fitting (que em particular era normal). De seguida baseando-nos no trabalho de Lausch

[31] (2.1 e 2.4) que foi posteriormente refinado por Bryce and Cossey [9] (3.3), mostramos que sob determinadas condições, uma classe de Fitting dá origem a um único par de Fitting. Antes de podermos enunciar e demonstrar esse teorema, precisamos primeiro de algumas definições e resultados.

Definição 4.3.1. Dizemos que uma classe de Fitting $\mathfrak{G}$ *admite um par de Fitting* (A, d), se $\mathfrak{G} = \mathfrak{X}(A, d) = \{G \in \mathscr{F} : (G)d_G = 1\}$, para alguma classe de Fitting $\mathfrak{F}$ e algum par de Fitting de $\mathfrak{F}$, (A, d).

Definição 4.3.2. Dois pares de Fitting de $\mathfrak{F}$, (A, d) e (B, f) dizem-se *isomorfos* se existir um isomorfismo de grupos $\phi : A \to B$, tal que $d \circ \phi = f$.

Teorema 4.3.1 (Lausch [31])**.** *Se uma dada classe de Fitting* $\mathfrak{F}$ *admitir dois pares de Fitting* (A, d)*,* (B, f)*, então estes são isomorfos.*

Demonstração. Da definição de par de Fitting, temos que cada elemento de A é da forma $(g)d_G$, com $G \in \mathscr{F}$ e $g \in G$. Mostramos que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \phi : & A & \longrightarrow B \\ & (g)d_G & \to (g)f_G \end{array}$$

é um isomorfismo. Recordemos que $A = \{(g)d_G : g \in G, G \in \mathscr{F}\}$. Para vermos que ϕ está bem definida, suponhamos que $(g)d_G = (h)d_H$, para alguns $g \in G \in \mathscr{F}$ e $h \in H \in \mathscr{F}$. Ponhamos $D = G \times H$ e para simplificar a notação, identificamos D com o elemento de $\mathscr{F}$ que lhe é isomorfo. Tomemos $\alpha : G \to D$ e $\beta : H \to D$ as imersões naturais de G e H, respectivamente, em D. Sai que $(g)d_G = (g)\alpha \circ d_D$ e $(h)d_H = (h)\beta \circ d_D$. Juntando este facto à nossa hipótese, concluímos que $1 = ((g^{-1})\alpha(h)\beta)\, d_D$. Por hipótese, $\mathfrak{X}(A, d) = \mathfrak{F} = \mathfrak{X}(B, f)$. Logo $(g^{-1})d_G(h)d_H \in D_{\mathfrak{F}}$ e usando a proposição 4.1.1, $D_{\mathfrak{F}} = \ker(f_D)$, donde $(g)\alpha \circ f_D = (h)\beta \circ f_D$. Portanto $(g)f_G = (h)f_H$, como queríamos.
Usando a mesma notação vem

$$\begin{aligned} ((g)d_G(h)d_H)\, \phi &= ((g)\alpha \circ d_D(h)\beta \circ d_D)\, \phi = ((g)\alpha(h)\beta)\, d_D \circ \phi \\ &= ((g)\alpha(h)\beta)\, f_D = (g)\alpha \circ f_D(h)\beta \circ f_D \\ &= (g)f_G(h)f_H = (g)d_G \circ \phi(h)d_H \circ \phi \end{aligned}$$

e portanto ϕ é um homomorfismo. Usando a definição 4.1.2 (iii), sai imediatamente que ϕ é sobrejectiva. Para além disso ϕ é injectiva pois

$$\ker(\phi) = \{(g)d_G : (g)d_H = 1\} = \{(g)d_G : g \in \ker(d_H)\} = (G_{\mathfrak{F}})d_H = \{1\}\,.$$

Logo ϕ é um isomorfismo e pela definição de ϕ, $d \circ \phi = f$, e concluímos que (A, d) e (B, f) são isomorfos. $\square$

Lema 4.3.2 (Lausch [31])**.** *Sejam $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting, $G_1, G_2 \in \mathfrak{F}$ e $\alpha \in \mathrm{Nemb}(G_1, G_2)$. Se $\mathfrak{G}$ for uma classe de Fitting fortemente normal em $\mathfrak{F}$, então $(g^{-1}, g^{\alpha}) \in (G_1 \times G_2)_{\mathfrak{G}}$, para cada $g \in G_1$.*

Demonstração. Ponhamos $G = G_1 \times {G_1}^{\alpha}$ e defina-se o seguinte automorfismo de G:

$$\begin{array}{rccc} \beta: & G & \to & G \\ & (g, h^{\alpha}) & \mapsto & (h, g^{\alpha}) \end{array}$$

Então, dado $g \in G_1$, vem $(g^{-1}, g^{\alpha}) = (g,1)^{-1}(g,1)^{\beta} \in [G, \mathrm{Aut}(G)]$. Como $\mathfrak{G}$ é fortemente normal em $\mathfrak{F}$, temos por definição que $[G, \mathrm{Aut}(G)] \leqslant G_{\mathfrak{G}}$ e portanto $(g^{-1}, g^{\alpha}) \in G_{\mathfrak{G}} = (G_1 \times {G_1}^{\alpha})_{\mathfrak{G}}$. Mas $G_1 \times {G_1}^{\alpha} \trianglelefteq G_1 \times G_2$, donde $(G_1 \times {G_1}^{\alpha})_{\mathfrak{G}} = (G_1 \times {G_1}^{\alpha}) \cap (G_1 \times G_2)_{\mathfrak{G}} \leqslant (G_1 \times G_2)_{\mathfrak{G}}$, saindo o resultado pretendido. $\square$

O próximo teorema é o resultado que nos propusemos demonstrar. A sua prova segue essencialmente a que Lausch apresentou em [31] (2.4), com alguns ajustes na notação e mais alguns detalhes.

Teorema 4.3.3 (Lausch [31], Bryce and Cossey [9])**.** *Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting. Se $\mathfrak{G}$ for fortemente normal em $\mathfrak{F}$, então $\mathfrak{G}$ admite um único par de Fitting de $\mathfrak{F}$.*

Demonstração. A unicidade segue do teorema 4.3.1. A prova da existência divide-se em duas partes. Em primeiro lugar mostramos que $\mathfrak{F}_*$ admite o par de Fitting $(\Lambda(\mathfrak{F}), \delta)$. Posteriormente, utilizando este facto mostramos o resultado propriamente dito.

Ponhamos $\mathfrak{X} = (G \in \mathscr{F} : (G)\delta_G = 1)$. Pelo corolário da proposição 4.1.1, $\mathfrak{X}$ é fortemente normal em $\mathfrak{F}$ e portanto pelo corolário a seguir a este $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{X}$. Resta-nos verificar que $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_*$.

Tomemos $G \in \mathscr{X}$. Vem, por definição de $\mathfrak{X}$ que $(G)\delta_G = 1$, donde concluímos que $(G)\varepsilon_G \leqslant \Gamma(\mathfrak{F})$. Seja $g \in G$, então $(g)\varepsilon_G \in \Gamma(\mathfrak{F})$ e

$$(g)\varepsilon_G = \left[({g_1}^{-1})\varepsilon_{G_1}(g_1)\alpha_1 \circ \varepsilon_{H_1}\right] \ldots \left[({g_n}^{-1})\varepsilon_{G_n}(g_n)\alpha_n \circ \varepsilon_{H_n}\right]$$

para alguns $G_i, H_i \in \mathscr{F}$, $g_i \in G_i$ e $\alpha_i \in \mathrm{Nemb}(G_i, H_i)$, com $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ora, $\mathfrak{F}_*$ é fortemente normal em $\mathfrak{F}$ e pelo lema anterior sai que, $({g_i}^{-1})\varepsilon_{G_i}(g_i)\alpha_i \circ \varepsilon_{H_i} \in$

$((G_i)\varepsilon_{G_i}(H_i)\varepsilon_{H_i})_{\mathfrak{F}*}$, com $i \in \{1, \ldots, n\}$, donde

$$(g)\varepsilon_G \in \prod_{i=1}^{n}((G_i)\varepsilon_{G_i}(H_i)\varepsilon_{H_i})_{\mathfrak{F}*} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n}(G_i)\varepsilon_{G_i}(H_i)\varepsilon_{H_i}\right)_{\mathfrak{F}*}.$$

Como

$$(G)\varepsilon_G \trianglelefteq \prod_{i=1}^{n}(G_i)\varepsilon_{G_i}(H_i)\varepsilon_{H_i}(G)\varepsilon_G$$

e

$$(G_i)\varepsilon_{G_i}(H_i)\varepsilon_{H_i} \trianglelefteq \prod_{i=1}^{n}(G_i)\varepsilon_{G_i}(H_i)\varepsilon_{H_i}(G)\varepsilon_G$$

concluímos que

$$(g)\varepsilon_G \in (G)\varepsilon_G \cap \left(\prod_{i=1}^{n}(G_i)\varepsilon_{G_i}(H_i)\varepsilon_{H_i}(G)\varepsilon_G\right)_{\mathfrak{F}*} = ((G)\varepsilon_G)_{\mathfrak{F}*}$$

Vem então que $g \in G_{\mathfrak{F}*}$. Portanto $G = G_{\mathfrak{F}*}$ e concluímos que $G \in \mathfrak{F}_*$. Logo $\mathfrak{F}_* = (G \in \mathscr{F} : (G)\delta_G = 1)$ e $\mathfrak{F}_*$ admite o par de Fitting $(\Lambda(\mathfrak{F}), \delta)$.
Seja $\mathfrak{G}$ uma classe de Fitting fortemente normal em $\mathfrak{F}$ e tomemos $\Theta(\mathfrak{G}) = \langle (g)\delta_G : G \in \mathscr{G}, g \in G\rangle \leqslant \Lambda(\mathfrak{F})$. Ponhamos $A = \Lambda(\mathfrak{F})/\Theta(\mathfrak{G})$ e para cada $G \in \mathscr{G}$ e $g \in G$ defina-se o seguinte homomorfismo:

$$\begin{array}{rccl} d_G: & G & \longrightarrow & A \\ & g & \mapsto & (g)\delta_G\Theta(\mathfrak{G}). \end{array}$$

É fácil de ver, como o que provámos no teorema 4.2.1, que (A, d) é um par de Fitting de $\mathfrak{F}$. Vejamos que $\mathfrak{G}$ admite (A, d). Por hipótese $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$. Se $G \in \mathscr{G}$ e $g \in G$, $(g)\delta_G \in \Theta(\mathfrak{G})$ (ou seja, $(G)d_G = 1$), logo temos uma das inclusões. Notemos $\mathfrak{X} = (G \in \mathscr{F} : (G)d_G = 1)$. Tomemos $G \in \mathscr{X}$ e $g \in G$. Então $(g)\delta_G \in \Theta(\mathfrak{G})$. Por definição de $\Theta(\mathfrak{G})$, $(g)\delta_G = (h_1)\delta_{H_1} \ldots (h_n)\delta_{H_n}$, para alguns $H_1, \ldots, H_n \in \mathscr{G}$ e $h_1 \in H_1, \ldots, h_n \in H_n$. Seja $D = G \times H_1 \times \cdots \times H_n$ e sejam $\alpha : G \to D, \beta_1 : H_1 \to D, \ldots, \beta_n : H_n \to D$, as imersões naturais de $G, H_1, \ldots, H_n$, respectivamente, no produto directo D. Para simplificar a notação identificamos D com o respectivo elemento de $\mathscr{F}$, que lhe é isomorfo. Temos então que $1 = (g^{-1})\delta_G(h_1)\delta_{H_1} \ldots (h_n)\delta_{H_n} = ((g^{-1})\alpha(h_1)\beta_1 \ldots (h_n)\beta_n)\,\delta_D$. Vimos acima que $\mathfrak{F}_* = (G \in \mathscr{F} : (G)\delta_G = 1)$, portanto $(g^{-1})\alpha(h_1)\beta_1 \ldots (h_n)\beta_n \in D_{\mathfrak{F}*}$. Pelo facto de $\mathfrak{G}$ ser fortemente normal em $\mathfrak{F}$, temos que $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{G}$. Mais, como $H_1, \ldots, H_n \in \mathfrak{G}$, $(H_1)\beta_1, \ldots, (H_n)\beta_n \in D_{\mathfrak{G}}$ e concluímos que $(g)\alpha \in D_{\mathfrak{G}} \cap (G \times 1 \times \cdots \times 1) = (G_{\mathfrak{G}} \times 1 \times \cdots \times 1)$. Logo $G \simeq (G)\alpha = G_{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{G}$ e temos o resultado pretendido. □

De seguida apresentamos dois corolários. O primeiro deles deriva da primeira parte da demonstração do teorema anterior, apresentando-nos uma descrição do radical $G_{\mathfrak{F}_*}$ que embora tenha um importante valor teórico, tem pouco interesse prático.

Corolário. *Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de Fitting e $G \in \mathscr{F}$. Então:*

(a) $G_{\mathfrak{F}_*} = ker(\delta_G)$;

(b) $(G_{\mathfrak{F}_*})\varepsilon_G = (G)\varepsilon_G \cap \Gamma(\mathfrak{F})$.

Corolário. *Se $\mathfrak{F}$ for uma classe de Fitting e $G \in \mathscr{F} \cap \mathfrak{N}$, então $(G)\varepsilon_G \leqslant \Gamma(\mathfrak{F})$.*

Demonstração. Usando a observação (b) a seguir ao teorema 3.2.18, vem que $G \in \mathfrak{F}_*$. Pela última afirmação do corolário anterior, vem que $(G)\varepsilon_G = (G)\varepsilon_G \cap \Gamma(\mathfrak{F})$ e temos o resultado pretendido. □

Terminanos esta apresentação de resultados envolvendo os trabalhos de Lausch e de Bryce e Cossey, com mais uma proposição de interesse puramente teórico, que nos dá uma forma de descrever os grupos pertencentes à classe $\mathfrak{F}_*$.

Teorema 4.3.4 (Lausch [31], Bryce and Cossey [9]). *Dada uma classe de Fitting $\mathfrak{F}$, uma condição necessária e suficiente para que um grupo G pertença à classe $\mathfrak{F}_*$, é a existência de um grupo R com subgrupos normais $N_0, N_1, \ldots, N_m$ pertencentes a $\mathfrak{F}$ e uma imersão normal $\varepsilon : G \to R$, satisfazendo as seguintes condições:*

(a) $R = \prod_{i=0}^{m} N_i$;

(b) $(g)\varepsilon \leqslant \prod_{i=0}^{m} [N_i, Aut(N_i)]$.

Demonstração. ($\Leftarrow$) Seja R um grupo satisfazendo as propriedades referidas. Como $\mathfrak{F} \in \text{Locksec}(\mathfrak{F}_*)$, pelo teorema 3.2.18, usando $(a) \Rightarrow (e)$, vem que $[N_i, \text{Aut}(N_i)] \leqslant (N_i)_{\mathfrak{F}_*} \leqslant R_{\mathfrak{F}_*}$, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Sai $(G)\varepsilon \trianglelefteq R_{\mathfrak{F}_*}$ e como $R_{\mathfrak{F}_*} \in \mathfrak{F}_*$, concluímos que $G \simeq (G)\varepsilon \in \mathfrak{F}_*$.
($\Rightarrow$) Suponhamos que $G \in \mathfrak{F}_*$ e sem perda de generalidade identifiquemos G com o respectivo elemento de $\mathfrak{F}_*$ que lhe é isomorfo. Para além disso, enumeremos também os elementos de $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$. Ora, pelo primeiro corolário de 4.3.3, alínea (b), temos $(G)\varepsilon_G \leqslant \Gamma(\mathfrak{F})$ e concluímos que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(g_i)\varepsilon_G = \prod_{\lambda \in I_i} ({g_\lambda}^{-1})\varepsilon_{G_\lambda}(g_\lambda)\alpha_\lambda \circ \varepsilon_{H_\lambda} \qquad (\gamma)$$

para alguns $G_\lambda, H_\lambda \in \mathscr{F}$, $g_\lambda \in G_{\mathfrak{F}}$, $\alpha_\lambda \in \mathrm{Nemb}(G_\lambda, H_\lambda)$ e alguns conjuntos de índices I_i. Definimos o seguinte subgrupo

$$R = \langle (G)\varepsilon_G, (G_\lambda)\varepsilon_{G_\lambda}, (G_\lambda)\alpha_\lambda \circ \varepsilon_{H_\lambda} : \lambda \in I_i, i \in \{1, \ldots, n\} \rangle$$

de $\Delta(\mathfrak{F})$. Ponhamos também $M_\lambda = \langle (G_\lambda)\varepsilon_{G_\lambda}, (G_\lambda)\alpha_\lambda \circ \varepsilon_{H_\lambda} \rangle$ para $\lambda \in I_i$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$. Notemos $N_0 = (G)\varepsilon_G$ e identifiquemos $N_1, \ldots, N_m$ como sendo os subgrupos distintos de entre todos os M_λ. Como $M_\lambda \trianglelefteq \langle (G_\lambda)\varepsilon_{G_\lambda}, (G_\lambda)\varepsilon_{H_\lambda} \rangle$, que é por sua vez um factor directo de $\Delta(\mathfrak{F})$ (e portanto normal), vem que $M_\lambda \trianglelefteq \Delta(\mathfrak{F})$. Logo, para cada $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$, $N_j \trianglelefteq R = \prod_{i=0}^{n} N_i$.

Pondo $\varepsilon = \varepsilon_G$, como $\varepsilon_G \in \mathrm{Nemb}(G, \Delta(\mathfrak{F}))$, vem $\varepsilon \in \mathrm{Nemb}(G, R)$. Restanos ver que a condição (b) é satisfeita. Com esse objectivo em mente, tomemos $\lambda \in I_i$, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$. Se $G_\lambda = H_\lambda$, a aplicação que a $(g)\varepsilon_{G_\lambda}$ faz corresponder o elemento $(g)\alpha_\lambda \circ \varepsilon_{H_\lambda}$ é claramente um automorfismo de $(G_\lambda)\varepsilon_{G_\lambda} = M_\lambda$. Caso tenhamos $G_\lambda \neq H_\lambda$, a aplicação que ao elemento $(g)\varepsilon_{G_\lambda}(g^*)\alpha \circ \varepsilon_{H_\lambda} \in (G_\lambda)\varepsilon_{G_\lambda}(G_\lambda)\alpha_\lambda \circ \varepsilon_{H_\lambda} = M_\lambda$ $(g, g^* \in G_\lambda)$ faz corresponder o elemento $(g^*)\varepsilon_{G_\lambda}(g)\alpha \circ \varepsilon_{H_\lambda}$ é também um automorfismo de M_λ. Portanto, cada termo do lado direito da equação (γ) pertence a algum $[M_\lambda, \mathrm{Aut}(M_\lambda)]$. Assim sendo, podemos concluir que $(G)\varepsilon \leqslant \prod_{i=0}^{m} [N_i, \mathrm{Aut}(N_i)]$, como queríamos. $\square$

Capítulo 5

O teorema de Berger

Esta secção é uma continuação da anterior e como tal continuamos a trabalhar no universo $\mathfrak{E}$, com $\mathfrak{F}$ denotando uma classe de Fitting geral, com o respectivo conjunto fundamental, $\mathscr{F}$. Para além disso, usamos os símbolos p e q para nos referirmos a primos arbitrários.
Como foi visto, a classe $\mathfrak{F}_*$ foi descrita de um ponto de vista teórico. Com o interesse de se aproximar de um conhecimento mais "prático", relativamente a este assunto, Berger, utilizando os "pares de Fitting" desenvolvidos por Laue, Lausch e Pain [30] mostrou em [4] que o $\mathfrak{F}_*$-radical de um grupo $G \in \mathfrak{F}$ podia ser calculado com base numa generalização dessa construção.
Contudo, apesar de dada uma classe de Fischer $\mathfrak{X}$, este trabalho permitir calcular o $\mathfrak{X}_*$-radical, $G_{\mathfrak{X}_*}$, para $G \in \mathfrak{X}$, num número finito de passos, tal cálculo pode adquirir uma complexidade muito maior, pois em geral o cálculo baseado neste pares de Fitting necessita de um conhecimento detalhado acerca de determinados subgrupos subnormais de G e seus respectivos grupos de automorfismos.
A nossa apresentação não seguirá, no entanto, o artigo [4] onde Berger demonstra estes resultados, mas sim o trabalho desenvolvido posteriormente por Brison em [6] e [7]. Esta apresentação é de compreensão mais acessível, resultando duma tentativa por parte do autor de ver o teorema de Berger no contexto do grupo de Lausch.
Antes de procedermos para uma apresentação dos grupos que Brison construiu, precisamos primeiro de alguns resultados.

5.1 Resultados preliminares

Definição 5.1.1. Um grupo finito $G \neq 1$ diz-se *comonolítico*, se possuir um único subgrupo maximal normal.

Proposição 5.1.1. *Seja G um grupo comonolítico. Então temos uma das três hipóteses seguintes:*

(a) $G' = G$;

(b) $1 = G' < G$ *e* G *é um* p*-grupo cíclico, para algum* $p \in \mathbb{P}$;

(c) $1 < G' = G^{\mathfrak{N}} < G$ *e* G/G' *é um* p*-grupo cíclico, para algum* $p \in \mathbb{P}$.

Demonstração. Suponhamos que $G' \neq G$ ($G' < G$) e que G não é um p-grupo. Tentemos então provar (c). Pelo facto de G/G' ser abeliano e portanto nilpotente, sai que $G^{\mathfrak{N}} \leqslant G'$. Seja M o único subgrupo maximal normal de G. Temos que $G^{\mathfrak{N}} \leqslant M$ e $M/G^{\mathfrak{N}}$ é o único subgrupo maximal de $G/G^{\mathfrak{N}}$, que é de facto normal, pois $G/G^{\mathfrak{N}}$ é nilpotente. Vem que $\Phi(G/G^{\mathfrak{N}}) = M/G^{\mathfrak{N}}$ é o único subgrupo maximal normal de $G/G^{\mathfrak{N}}$. Se um grupo possui um único subgrupo maximal normal, é um p-grupo, pois qualquer elemento que não pertença ao subgrupo maximal gera o grupo todo (se quisermos, utilizando a propriedade não-geradora de $\Phi(G/G^{\mathfrak{N}})$). Agora, a ordem do grupo gerado por esse elemento só pode ser prima, pois para cada primo que divida a ordem existe um subgrupo normal, que vai ser maximal. Concluímos que $G/G^{\mathfrak{N}} \simeq C_p$, para algum primo $p \in \mathbb{P}$ (em particular, $G' \leqslant G^{\mathfrak{N}}$). □

A demonstração do próximo lema será omitida. No entanto, poderá ser consultada num dos trabalhos nela referidos.

Lema 5.1.2 (Berger [4], cf. Brison [6] (1.9.3); (4.1.16))**.** *Seja* G *um grupo finito, contendo subgrupos* V *e* M*, com* $V \trianglelefteq G$ *e* $M \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$*, de tal forma que* $G = VM$*. Seja* U *um grupo isomorfo a* V *e* $\rho : V \to U$ *um isomorfismo. Então* ρ *induz um homomorfismo* $\phi : G \to Aut(U)$*, dado por:*

$$(g)\phi : u \mapsto \left(\left((u)\rho^{-1}\right)^g\right)\rho, \text{ para } u \in U \text{ e } g \in G.$$

Tomando o produto semidirecto $U \rtimes \mathrm{Aut}(U)$*, temos* $U \rtimes (M)\phi \leqslant U \rtimes \mathrm{Aut}(U)$*. Se* $e_G \in \mathrm{Qnat}(G, \Delta(\mathfrak{F}))$ *e* $e_{U \rtimes (M)\phi} \in \mathrm{Qnat}(U \rtimes (M)\phi, \Delta(\mathfrak{F}))$*, então:*

(a) $G \in \mathfrak{F}$ *se e só se* $U \rtimes (M)\phi \in \mathfrak{F}$;

(b) Se $G \in \mathfrak{F}$*, então* $(m)e_G \equiv ((m)\phi)e_{U \rtimes (m)\phi} \pmod{\Gamma(\mathfrak{F})}$*, para cada* $m \in M$.

5.2 Grupos Relevantes

Estamos agora em condições de iniciar o estudo dos grupos relevantes. Começamos com a seguinte

Definição 5.2.1 (Brison [7])**.** Seja $p \in \mathbb{P}$. Dizemos que $G \in \mathfrak{F}$ é $(\mathfrak{F}, p)$-*relevante* se $G \neq 1$ e existe $U = O^p(U) \in \mathfrak{F}$ tal que, se $P \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}(U))$ e $P^* = P \cap (UP)_{\mathfrak{F}}$, tenhamos as seguintes condições:

(a) existe um isomorfismo $\phi : UP^* \to G$;

(b) $U = [U, P^*]$.

Acima, UP e UP^* abreviam, respectivamente $U \rtimes P$ e $U \rtimes P^*$ ($\leqslant U \rtimes \mathrm{Aut}(U)$). No que se segue adoptamos essa convenção.
Mais geralmente do que o acima apresentado, dizemos que G é $\mathfrak{F}$-*relevante*, se G for $(\mathfrak{F}, p)$-relevante para algum $p \in \mathbb{P}$.

Sempre que G for um grupo $(\mathfrak{F}, p)$-relevante, U, P, P^* designam os grupos como os acima referidos.
A partir da definição acima apresentada, tiramos várias consequências.

Proposição 5.2.1 (Brison [7])**.** *Se G for um grupo $(\mathfrak{F}, p)$-relevante, então:*

(a) $UP^* = (UP)_{\mathfrak{F}}$*;*

(b) $P^* > 1$*;*

(c) $U = (UP)^{\mathfrak{N}} = O^p(UP)$*;*

(d) Se ϕ for como na definição 5.2.1, então $(U)\phi = G^{\mathfrak{N}} = O^p(G) < G$.

Demonstração. (a) Como $U \in \mathfrak{F}$, $U = U_{\mathfrak{F}} \leqslant (UP)_{\mathfrak{F}}$. Usando a lei modular de Dedekind sai que $UP^* = U(P \cap (UP)_{\mathfrak{F}}) = UP \cap (UP)_{\mathfrak{F}} = (UP)_{\mathfrak{F}}$.
(b) Por $G \neq 1$, vem $U \neq 1$. Como $U = [U, P^*]$, concluímos que $P^* > 1$.
(c) Pelo facto de $U = [U, P^*]$, vem que $(UP^*)^{\mathfrak{N}} = U$. Ora, UP^*/U é um p-grupo e portanto $O^p(UP^*) \leqslant U$. Se $V = O^p(UP^*) < U$, então U/V era um p-grupo não trivial e $V \geqslant O^p(U) = U$, o que é absurdo.
(d) Resulta da alínea anterior, tendo em conta que ϕ é um isomorfismo. □

Corolário (Brison [7])**.** *Se um grupo G for simultâneamente $(\mathfrak{F}, p)$-relevante e $(\mathfrak{F}, q)$-relevante , então $p = q$.*

Demonstração. Pela proposição 5.2.1, alínea (d), $O^p(G) = G^{\mathfrak{N}} = O^q(G) < G$ e temos o resultado. □

Notação. (a) Denotamos por $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}$, a classe de todos os grupos $\mathfrak{F}$-relevantes. Em particular, denotamos por $\mathfrak{R}^p_{\mathfrak{F}}$, a classe de todos os grupos $(\mathfrak{F}, p)$-relevantes;

(b) Dado $w \in \mathbb{N}$, definimos:

$$\Theta^w(\mathfrak{F}) = \left\{ f \in \Delta(\mathfrak{F}) : \forall G \in \mathscr{F}, (G)f \neq 1 \Rightarrow (G \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{F}} \ \wedge \ |G^{\mathfrak{N}}| \leqslant w) \right\}$$

subgrupo de $\Delta(\mathfrak{F})$;

(c) Para cada classe de grupos $\mathfrak{F}$-relevantes, $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}$, escolhemos um conjunto de representantes das classes de isomorfismo, que denotamos por $\mathscr{R}_{\mathfrak{F}}$, da seguinte forma: para cada $G \in \mathfrak{R}^p_{\mathfrak{F}} \cap \mathscr{F}$, com $p \in \mathbb{P}$, fixamos $P \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}(G^{\mathfrak{N}}))$. Pondo $U = G^{\mathfrak{N}}$, construímos o produto semidirecto UP e definimos $R = (UP)_{\mathfrak{F}}$. Se pusermos $P^* = P \cap (UP)_{\mathfrak{F}}$, tal como vimos num dos lemas acima, vem $R = UP^*$. Por construção $U = O^p(U) \in \mathfrak{F}$, donde por definição, $G \simeq UP^*$. $\mathscr{R}^p_{\mathfrak{F}}$ é o conjunto de todos os grupos $R = UP^*$, para todos os $G \in \mathscr{F} \cap \mathfrak{R}^p_{\mathfrak{F}}$. Finalmente, $\mathscr{R}_{\mathfrak{F}} = \bigcup\limits_{p \in \mathbb{P}} \mathscr{R}^p_{\mathfrak{F}}$.

(d) Sempre que $G \in \mathfrak{F}$, e_G denotará um elemento de $Qnat(G, \Delta(\mathfrak{F}))$.

(e) Se $R = UP^* \in \mathscr{R}_{\mathfrak{F}}$, então P_0^* denotará o seguinte subgrupo de P^*:

$$P_0^* = \{P^*; \mathrm{Aut}(U)\} \langle x \in P^* : [U, \langle x \rangle] < U \rangle \, ;^{26}$$

Sempre que nos referirmos a um grupo $R = UP^* \in \mathscr{R}_{\mathfrak{F}}$, ficará subentendido que $U = O^p(R) = R^{\mathfrak{N}}$, para determinado $p \in \mathbb{P}$ e $P^* = P \cap (UP)_{\mathfrak{F}}$, onde $P \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}(U))$. P_0^* denotará o grupo acima definido, para $R = UP^* \in \mathscr{R}_{\mathfrak{F}}$.

Observações (Brison [7])**.** Sejam $v, w \in \mathbb{N}$. Então:

(a) O conjunto $\left\{ R \in \mathscr{R}_{\mathfrak{F}} : |R^{\mathfrak{N}}| \leqslant w \right\}$ é finito;

(b) Temos que $\Theta(\mathfrak{F}) = \prod\limits_i (R_i)e_i$, onde o produto é tomado sobre os diferentes $R_i \in \mathscr{R}_{\mathfrak{F}}$, tais que $|R_i| \leqslant w$ e $e_i \in \mathrm{Qnat}(R_i, \Delta(\mathfrak{F}))$;

(c) Se $v \leqslant w$, então $\Theta^v(\mathfrak{F}) \leqslant \Theta^w(\mathfrak{F})$.

Para simplificar a notação, dada uma classe de Fitting $\mathfrak{F}$, denotamos $\Gamma(\mathfrak{F})$ por Γ e $\Theta^w(\mathfrak{F})$ por Θ^w.

Lema 5.2.2. *Seja $G \in \mathfrak{F}$. Então $(G)e_G \leqslant \Gamma\Theta^{|G^{\mathfrak{N}}|}$.*

[26] $\{P^*; \mathrm{Aut}(U)\}$ é o subgrupo focal de P^* em $\mathrm{Aut}(U)$, como definido nos preliminares.

Demonstração. Seja $w = |G^{\mathfrak{N}}|$. Como $G \in \mathfrak{F}$ é finito, pode verificar-se que G é gerado por determinados subgrupos subnormais, comonolíticos (cf. Doerk and Hawkes [15] A.14.16 (a)), $A_1, \ldots, A_n \leqslant G$, digamos. Temos então:

$$G = \langle A_1, \ldots, A_n : A_i \trianglelefteq\trianglelefteq G, A_i \text{ comononlítico}, i = 1, \ldots, n\rangle \qquad (1)$$

Como consequência da proposição 5.1.1, temos também que:

$$A_i{}' = A_i{}^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq\trianglelefteq G^{\mathfrak{N}}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \qquad (2)$$

De acordo com essa mesma proposição, para cada A_i temos três casos a considerar, correspondendo às alíneas (a), (b) e (c). Em cada um desses casos, mostramos que $(A_i)e_G \leqslant \Gamma\Theta^w$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tendo provado o que afirmámos o resultado sai utilizando (1). Na corpo da demonstração e_i denotará um elemento fixo pertencente a $\mathrm{Qnat}(A_i, \Delta)$.
Se $A_i{}' = A_i$ (correspondente a 5.1.1 (a)), então $(A_i)e_i \leqslant \Gamma$, por definição de Γ. Logo $(A_i)e_i \leqslant \Gamma \leqslant \Gamma\Theta^w$.
Suponhamos que $1 = A_i{}' < A_i$ e A_i é cíclico de ordem $p \in \mathbb{P}$ (conforme 5.1.1 (b)). Assim sendo, $A_i \in \mathfrak{N}$ e como $A_i \trianglelefteq\trianglelefteq G$, sai que $A_i \in \mathfrak{F}$. Utilizando o segundo corolário do teorema 4.3.3, com as devidas adaptações ($\mathfrak{F}$ em vez de $\mathscr{F}$ e e_i em vez de $\varepsilon_i = \varepsilon_{A_i}$), vem que $(A_i)e_i \leqslant \Gamma$ e portanto $(A_i)e_G \leqslant \Gamma \leqslant \Gamma\Theta^w$.
Por último, suponhamos que $1 < A_i{}' = A_i{}^{\mathfrak{N}} < A_i$ e $A_i/A_i{}'$ é um p-grupo cíclico, para algum $p \in \mathbb{P}$ (como em 5.1.1 (c)). Ora, $A_i \trianglelefteq\trianglelefteq G$ e logo $p \in \mathrm{Comp}(G) \subseteq \mathrm{char}(\mathfrak{F})$. Denotemos $A = A_i$ e seja x um p-elemento de A tal que $A = A' \langle x\rangle$. Deste modo $[A', \langle x\rangle] \trianglelefteq A$ e portanto $\langle x\rangle \leqslant C_A(A'/[A', \langle x\rangle]) \trianglelefteq A$, donde $A = C_A(A'/[A', \langle x\rangle])$. Então, por um lado, $A'/[A', \langle x\rangle] \leqslant Z(A/[A', \langle x\rangle])$ e por outro, como A/A' é cíclico, $(A/[A', \langle x\rangle])/(A'/[A', <x>])$ também o é. Desta forma, podemos concluir que $A/[A', \langle x\rangle]$ é abeliano, donde $A' = [A', \langle x\rangle]$. Vejamos que estamos em condições de utilizar o lema 5.1.2. A identidade de A' induz um homomorfismo $\phi : A \to \mathrm{Aut}(A')$. Como $p \in \mathrm{char}(\mathfrak{F})$, $\langle x\rangle \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}$. Assim sendo, por 5.1.2 (a) $A' \rtimes \langle (x)\phi\rangle \in \mathfrak{F}$. Ora, $A' = [A', \langle x\rangle]$, portanto $A' = [A', \langle (x)\phi\rangle]$ e podemos concluir que $\langle (x)\phi\rangle$ é um p-grupo não trivial.
Tomemos $S \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}(A'))$, tal que $\langle (x)\phi\rangle \leqslant S$. Como $A' \langle (x)\phi\rangle \in \mathfrak{F}$, então $\langle (x)\phi\rangle \leqslant S^* = S \cap (A'S)_{\mathfrak{F}}$. Por outro lado $A' = A^{\mathfrak{N}} = O^p(A')$ e portanto $A'S^*$ é $(\mathfrak{F}, p)$-relevante. Seja $e^* \in \mathrm{Qnat}(A'S^*, \Delta)$. Temos que $A' = (A'S^*)^{\mathfrak{N}}$, donde $(A'S^*)e^* \leqslant \Theta^|A'|$, por definição.Como $|A'| \leqslant |G^{\mathfrak{N}}| = w$, vem pela observação ($c$) atrás que $(A'S^*)e^* \leqslant \Theta^w$ e podemos concluir que

$$((x)\phi)e^* \in \Theta^w \qquad (3)$$

Pelo facto de $A = A' \langle (x)\phi\rangle \in \mathfrak{F}$, $A' \simeq A'$ e $A' \langle (x)\phi\rangle \trianglelefteq\trianglelefteq (A'S^*) \in \mathfrak{F}$, podemos aplicar 5.1.2 (b) e sai que $(x)e_A \equiv ((x)\phi)e^* \pmod{\Gamma}$. Como $((x)\phi)e^* \in \Gamma\Theta^w$, vem que $(x)e_A \in \Gamma\Theta^w$. Uma vez que $(A')e_A \leqslant \Gamma$, concluímos que $(A)e_G = (A)e_A \leqslant \Gamma\Theta^w$, como pretendido. $\square$

5.3 Grupos Básicos e Teorema de Berger

Introduzimos desde já uma importante subclasse dos grupos $\mathfrak{F}$-relevantes, $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}$.

Definição 5.3.1 (Brison [7])**.** Utilizando a notação previamente fixada, definimos a classe $\mathfrak{B}_{\mathfrak{F}}$ dos *grupos $\mathfrak{F}$-básicos*, da seguinte forma:

$$\mathfrak{B}_{\mathfrak{F}} = (G \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{F}} : G \simeq UP^* \in \mathscr{R}_{\mathfrak{F}} \Rightarrow P_0^* < P^*) .$$

Pomos também $\mathscr{B}_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{F}} \cap \mathscr{R}_{\mathfrak{F}}$ e $\mathscr{B}_{\mathfrak{F}}^{p} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{F}} \cap \mathscr{R}_{\mathfrak{F}}^{p}$.

O próximo lema apresenta-nos o passo indutivo para o teorema que se lhe segue. Nesse teorema construímos uma expressão para elementos no grupo de Lausch, em termos de grupos $\mathfrak{F}$-básicos.

Lema 5.3.1. *Se $R = UP^* \in \mathscr{R}_{\mathfrak{F}}$ e $e_R \in \mathrm{Qnat}(R, \Delta)$, então:*

$$(UP_0^*)e_R \leqslant \Gamma\Theta^{|U|-1}.$$

Demonstração. Pelo facto de $U \leqslant R'$, vem que

$$(U)e_R \leqslant \Gamma \leqslant \Gamma\Theta^{|U|-1}. \tag{1}$$

Seja $x \in P_0^*$. Então, por definição de P_0^*, existem $y_1, \dots, y_n \in P^*$, com $[U, \langle y_i\rangle] < U$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, em conjunto com um elemento $t \in \{P^*, \mathrm{Aut}(U)\}$, de tal forma que $x = ty_1 \dots y_n$.
Se $a \in P^*$ e $b \in \mathrm{Aut}(U)$ forem tais que $a^b \in P^*$, então sendo UP^*/U um p-grupo e logo nilpotente, vem que $U\langle a\rangle$ e $U\langle a^b\rangle$ são subgrupos subnormais de R. A conjugação por b induz portanto uma imersão subnormal de $U\langle a\rangle$ em $U\langle a^b\rangle$. Utilizando o lema 4.2.4, alínea (a), vem que

$$(a^{-1})e_{U\langle a\rangle}(a^b)e_{U\langle a^b\rangle} \in \Gamma$$

e portanto, por $(a^{-1}a^b)e_R \in \Gamma$. Como consequência $(\{P^*; \mathrm{Aut}(U)\})\, e_R \leqslant \Gamma$ e em particular concluímos que

$$(t)e_R \in \Gamma \leqslant \Gamma\Theta^{|U|-1}. \tag{2}$$

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se pusermos $A_i = [U, \langle y_i\rangle]\langle y_i\rangle$, concluímos que $A_i \trianglelefteq U\langle y_i\rangle \trianglelefteq\trianglelefteq UP^* = R$. Como $y_i \in P^*$ (que é um p-grupo e em particular nilpotente), então ${A_i}^{\mathfrak{N}} \leqslant [U, \langle y_i\rangle] < U$. Usando sucessivamente o lema 5.2.2 e a observação (c) que o precede, vem

$$(A_i)e_i \leqslant \Gamma\Theta^{|{A_i}^{\mathfrak{N}}|} \leqslant \Gamma\Theta^{|U|-1}, \text{ para } e_i \in \mathrm{Qnat}(A_i, \Delta).$$

Como $A_i \trianglelefteq\trianglelefteq R$, temos que

$$(y_i)e_R = (y_i)e_i \in \Gamma\Theta^{|U|-1}. \tag{3}$$

O resultado segue-se de (1), (2) e (3). $\square$

Proposição 5.3.2 (Brison [7]). *Seja $\xi \in \Gamma\Theta^w$, com $w \in \mathbb{N}$. Então ou $\xi \in \Gamma$, ou existem $R_1, \dots, R_n \in \mathscr{B}_{\mathfrak{F}}$ distintos, com $R = U_i P_i^*$ (como na notação introduzida) e elementos $x_i \in R_i \backslash U_i {P_i^*}_0$, tais que $|{R_i}^{\mathfrak{N}}| \leqslant w$ e*

$$\xi \equiv (x_1)e_1 \dots (x_n)e_n \pmod{\Gamma}, \text{ com } e_i \in \mathrm{Qnat}(R_i, \Delta), i \in \{1, \dots, n\}\,.$$

Demonstração. Como já foi referido, a demonstração segue por indução em w.
Se $w = 1$, pela construção de Θ^w vem que $\xi \in \Gamma$.
Suponhamos que $\xi \in \Gamma\Theta^w$, com $w > 1$ e, por indução, suponhamos que o resultado é válido para cada $\xi \in \Gamma\Theta^v$, onde $v < w$. Pela observação (a) acima do lema 5.2.2, existe apenas um número finito de $R_i \in \mathscr{B}_{\mathfrak{F}}$ distintos, tais que $|{R_i}^{\mathfrak{N}}| \leqslant w$. Digamos que estes são $R_1, \dots, R_n$, com $R_i = U_i P_i^*$, para $i \in \{1, \dots, n\}$. Utilizando a observação (b), existem elementos $y_i \in R_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, satisfazendo:

$$\xi \equiv (y_1)e_1 \dots (y_n)e_n \pmod{\Gamma}, \text{ com } e_i \in \mathrm{Qnat}(R_i, \Delta). \tag{1}$$

Definamos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{N}$:

$$A = \left\{a \leqslant n : |{R_a}^{\mathfrak{N}}| < w \ \vee\ \left(|{R_i}^{\mathfrak{N}}| = w \ \wedge\ y_a \in U_a {P_a^*}_0\right)\right\}$$

e

$$B = \left\{b \leqslant n : |{R_b}^{\mathfrak{N}}| = w \ \wedge\ y_b \notin U_a {P_b^*}_0\right\}$$

Como Λ é abeliano, podemos agrupar a equação (1) da seguinte forma:

$$\xi \equiv \left(\prod_{a \in A} (y_a)e_a\right)\left(\prod_{b \in B} (y_b)e_b\right) \pmod{\Gamma}, e_i \in \mathrm{Qnat}(R_i, \Delta). \tag{2}$$

Se $a \in A$, então temos dois casos possíveis. Ou $|{R_a}^{\mathfrak{N}}| < w$ e $(y_a)e_a \in \Gamma\Theta^{w-1}$, ou $y_a \in U_a {P_a^*}_0$ e utilizando o lema anterior vem também que $(y_a)e_a \in \Gamma\Theta^{w-1}$. Logo

$$\xi_1 \equiv \prod_{a \in A} (z_c)e_c \in \Gamma\Theta^{w-1}.$$

Por indução, ξ_1 satisfaz uma congruência da forma:

$$\xi_1 \equiv \prod_{c \in C} (z_c)e_c \pmod{\Gamma} \tag{3}$$

para um conjunto finito de índices, C e onde os elementos $R_c \in \mathscr{B}_{\mathfrak{F}}$ são distintos, com $|R_c{}^{\mathfrak{N}}| \leqslant w-1$ e $z_c \in R_c \backslash U_c {P_c^*}_0$, $c \in C$.
Caso $b \in B$, vem $y_b \in R_b \backslash U_b {P_b^*}_0$, donde $R_b \in \mathscr{B}_{\mathfrak{F}}$. Estes R_b são distintos entre si (cf. (1)) e distintos dos R_c, para $c \in C$, pois $|R_c{}^{\mathfrak{N}}| \leqslant w-1 < w = |R_b{}^{\mathfrak{N}}|$.
Juntando (2) e (3), com a notação apropriada, concluímos o pretendido. $\square$

O próximo teorema é uma versão preliminar do teorema de Berger já referido. Este mostra que dados determinados pares de Fitting de $\mathfrak{F}$, podemos calcular o $\mathfrak{F}_*$-radical, $G_{\mathfrak{F}_*}$ de um grupo $G \in \mathfrak{F}$.

Teorema 5.3.3 (Berger [4]). *Se, para cada $R = UP^* \in \mathscr{B}_{\mathfrak{F}}$ existir um par de Fitting de $\mathfrak{F}$, (H^R, h^R), satisfazendo as seguintes condições:*

(a) O grupo abeliano H^R é um p-grupo, com $R/R^{\mathfrak{N}}$ sendo um p-grupo, $p \in \mathbb{P}$;

(b) Usando a notação convencionada, $\ker(h^R_R) = UP^*_0$;

(c) Se $R_j = U_j P_j^* \in \mathscr{B}_{\mathfrak{F}}$, com $|U_j| \leqslant |U|$ e $R_j \not\simeq R$, então $(R_j)h^R_{R_j} = 1$.

Então, dado $G \in \mathfrak{F}$, temos

$$G_{\mathfrak{F}_*} = \bigcap \left\{\ker(h^R_G) : R \in \mathscr{B}^p_{\mathfrak{F}},\ \text{com } p \mid |G/G^{\mathfrak{N}}| \text{ e } |R^{\mathfrak{N}}| \leqslant |G^{\mathfrak{N}}|\right\}.$$

Demonstração. Para cada $R \in \mathscr{B}_{\mathfrak{F}}$, seja $\hat{h}^R$ o epimorfismo de Δ para H^R, como construído na definição 4.2.1. Denotemos

$$\Sigma = \bigcap \left\{\ker\left(\hat{h}^R\right) : R \in \mathscr{B}^p_{\mathfrak{F}},\ p \mid |G/G^{\mathfrak{N}}| \text{ e } |R^{\mathfrak{N}}| \leqslant |G^{\mathfrak{N}}|\right\} \leqslant \Delta$$

Como vimos na alínea (b) da proposição 4.2.2, $\Gamma \leqslant \ker(\hat{h}^R)$ e portanto $\Gamma \leqslant \Sigma$, donde $(G)e_G \cap \Gamma \leqslant (G)e_G \cap \Sigma$. No que resta da prova, mostramos que esta desigualdade é de facto uma igualdade. Tendo isso demonstrado, o teorema fica provado pois, utilizando o primeiro corolário do teorema 4.3.3, alínea (b), vem $(G_{\mathfrak{F}_*})e_G = (G)e_G \cap \Gamma$ e aplicando a alínea (c) da proposição 4.2.2 $(G)e_G \cap \Sigma = (\cap \ker(h^R_G))e_G$.
Suponhamos que $g \in G$ e que $(g)e_G \notin \Gamma$. Pelo lema 5.2.2, $(g)e_G \in \Gamma\Theta^w$, onde $w = |G^{\mathfrak{N}}|$. Pela proposição 5.3.2, existem $R_1, \ldots, R_n \in \mathscr{B}_{\mathfrak{F}}$ $(n \geqslant 1)$ distintos, com $|R_i{}^{\mathfrak{N}}| \leqslant w$, juntamente com elementos $x_i \in R_i \backslash U_i {P_i^*}_0$, tais que

$$\xi \equiv (x_1)e_1 \ldots (x_n)e_n \pmod{\Gamma},\ \text{com } e_i \in \mathrm{Qnat}(R_i, \Delta), i \in \{1, \ldots, n\}. \qquad (1)$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que $|R_i{}^{\mathfrak{N}}| \leqslant |R_n{}^{\mathfrak{N}}|$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$ e R_n denote o elemento $R = UP^*$. Pela hipótese (c) do teorema, em conjunto com a alínea (a) da proposição 4.2.2, para cada $j = 1, \ldots, n-1$, $(R_j)e_j \leqslant \ker(\hat{h}^R)$. Por (1) sai que

$$((g)e_G)\hat{h}^R = 1 \ldots 1((x_n)e_n)\hat{h}^R$$

Ora, $x_n \in R \backslash UP_0^*$ e pela hipótese (b), $\ker(h_R^R) = UP_0^*$. Logo $((x_n)e_n)h_R^R \neq 1$ e portanto $(g)e_G \notin \ker(\hat{h}^R)$ (cf. 4.2.2 (a)). Sai que $(g)h_G^R \neq 1$, donde concluímos que h_G^R é um homomorfismo não trivial de G para o p-grupo H^R, com $p \mid |G/G^{\mathfrak{N}}|$ (cf. (a)). Uma vez que $|R^{\mathfrak{N}}| \leqslant |G^{\mathfrak{N}}|$, então $(g)e_G \notin \Sigma$.
Desta forma provámos que, se $(g)e_G \notin \Gamma$, então $(g)e_G \notin \Sigma$. O contra-recíproco desta afirmação dá-nos a igualdade pretendida e o resultado sai como o observado. $\square$

5.4 Construção de um par de Fitting adequado

De seguida construímos novos pares de Fitting, que sustentam o teorema anterior. Esta construção é baseada no homomorfismo transferência, já apresentado. Em termos de generalidade encontra-se entre os pares de Fitting apresentados por Laue, Lausch e Pain [30] e os de Berger [4].

Notação. (a) Se G for um grupo e $H \leqslant G$ for tal que $H' \leqslant H_0 \trianglelefteq G$, então $V_{G \to H/H_0}$ denota como habitualmente o homomorfismo transferência. No caso de $H' = H_0$, denotamos $V_{G \to H/H_0}$, apenas por $V_{G \to H}$;

(b) Se $H, G \in \mathfrak{F}$, notamos $\mathcal{C}(H,G) = \{S \trianglelefteq\trianglelefteq G : S \simeq H\}$;

(c) Seja G um grupo e $H \leqslant G$. Dado $g \in N_G(H)$, quando conveniente $\overline{g}$ denotará o automorfismo induzido em H por conjugação pelo elemento g.

Construção (Brison [6], cf Berger [4])**.** Seja $R = UP^* \in \mathscr{B}_{\mathfrak{F}}$, como habitualmente e suponhamos que $\mathfrak{F}$ e R satisfazem a seguinte condição:

$$\text{Se } G \in \mathfrak{F}, \text{ e } U \simeq X \trianglelefteq\trianglelefteq G, \text{ então } XT \in \mathfrak{F}, \forall T \in \mathrm{Syl}_p(N_G(X)).^{27} \qquad (\eta)$$

Tomemos $G \in \mathfrak{F}$ e $X \trianglelefteq\trianglelefteq G$, tal que $X \simeq U$. Seja $\rho : X \to U$ um isomorfismo. Então ρ induz um homomorfismo $\sigma : N_G(X) \to \mathrm{Aut}(U)$, dado por:

$$(g)\sigma : u \mapsto \left(\left((u)\rho^{-1}\right)^g\right)\rho = (u)\rho^{-1} \circ \overline{g} \circ \rho, \text{ para } u \in U \text{ e } g \in G,$$

cujo núcleo é $C_G(X)$.
Se $S \in \mathrm{Syl}_p(N_G(X))$, pelo teorema de Sylow em $\mathrm{Aut}(U)$, existe $\lambda \in \mathrm{Aut}(U)$, tal que $((S)\sigma)^\lambda \leqslant P$, onde P é o p-subgrupo de Sylow de $\mathrm{Aut}(U)$ que fixámos aquando da

[27]Se $\mathfrak{F}$ for uma classe de Fischer, então (η) é satisfeita por $\mathfrak{F}$ e por R, para cada $R \in \mathscr{B}_{\mathfrak{F}}$.

construção de $R = UP^* \in \mathscr{B}_{\mathfrak{F}}$. Pela condição (η), $XS \in \mathfrak{F}$. Utilizando a alínea (a) do lema 5.1.2, $U \rtimes (S)\sigma \in \mathfrak{F}$. Como $\lambda \in \mathrm{Aut}(U)$, também $U \rtimes ((S)\sigma)^\lambda \in \mathfrak{F}$. Ora, $U \rtimes ((S)\sigma)\lambda \trianglelefteq\trianglelefteq UP$ e portanto $((S)\sigma)^\lambda \leqslant P^* = P \cap (UP)_{\mathfrak{F}}$. Se $S_0 = \{S; N_G(X)\}$, então $((S_0)\sigma)^\lambda \leqslant P_0^* = \{P^*; \mathrm{Aut}(U)\}$ e podemos considerar a aplicação $\tau : S/S_0 \to P^*/P_0^*$ definida por:

$$\tau : sS_0 \longmapsto ((s)\sigma)^\lambda P_0^*,$$

que é, de facto, um homomorfismo de S/S_0 para P^*/P_0^*.

Notação. Sempre que quisermos ser mais explicitos relativamente à construção do homomorfismo τ, acima feita, pomos $\tau = \tau^{\rho,\lambda}_{\left(X,S/S_0 \to P^*/P_0^*\right)}$.

Lema 5.4.1 (Brison [6])**.** *Sejam $G_1, G_2 \in \mathfrak{F}$. Para cada $i \in \{1,2\}$, tomemos $X_i \in \mathcal{C}(U, G_i)$ e sejam $\rho_i, S_i, \lambda_i, \sigma_i$ e $\tau_i = \tau^{\rho_i,\lambda_i}_{\left(X_i,S_{i0} \to P^*/P_0^*\right)}$, como na construção acima. Se existir um isomorfismo $\mu : X_1S_1 \to X_2S_2$, então dado $s \in S_1$, $(s)\tau_1 = ((s)\mu)\tau_2$.*

Demonstração. Sejam $x \in X_1$ e $s \in S_1$. Então

$$\begin{aligned} ((x)\mu)(\mu^{-1} \circ \overline{s} \circ \mu) &= (s^{-1}xs)\mu = (s)\mu^{-1}(x)\mu(s)\mu \\ &= (x)\mu^{(s)\mu} = ((x)\mu)\overline{(s)\mu} \end{aligned} \tag{1}$$

Para o que pretendemos, basta verificar que $(s)\sigma_1 \equiv ((s)\mu)\sigma_2 \pmod{P_0^*}$. Ora, $(s)\sigma_1, ((s)\mu)\sigma_2 \in P^*$ e portanto

$$(s)\sigma_1((s)\mu)\sigma_2^{-1} \in P^*. \tag{2}$$

Seja $u \in U$. Então, aplicando (1) e (2), sai que:

$$\begin{aligned} &(u)\left((s)\sigma_1((s)\mu)\sigma_2^{-1}\right) \\ &= (u)((\rho_1 \circ \lambda_1)^{-1} \circ \overline{s} \circ (\rho_1 \circ \lambda_1))((\rho_2 \circ \lambda_2)^{-1} \circ \overline{(s^{-1})\mu} \circ (\rho_2 \circ \lambda_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (u)(\lambda_1^{-1} \circ \rho_1^{-1} \circ \mu \circ \rho_2 \circ \lambda_2) \circ (\lambda_2^{-1} \circ \rho_2^{-1} \circ \mu^{-1} \circ \overline{s} \circ \mu \circ \rho_2 \circ \lambda_2) \\ &(\lambda_2^{-1} \circ \rho_2^{-1} \circ \mu \circ \rho_1 \circ \lambda_1) \circ (\lambda_2^{-1} \circ \rho_2^{-1} \circ \mu^{-1} \circ \overline{(s^{-1})\mu} \circ \rho_2 \circ \lambda_2) \in u^{\{P^*;\mathrm{Aut}(U)\}}, \end{aligned}$$

demonstrando o resultado pretendido. □

Corolário (Brison [6])**.** *Para cada $X \trianglelefteq\trianglelefteq G$ e $S \in \mathrm{Syl}_p(N_G(X))$, a aplicação τ, como acima definida, é independente das escolhas feitas para ρ e λ.*

Demonstração. No lema anterior, se tomarmos $X = X_1 = X_2$, $\mu = id$ e $\rho = \rho_1 = \rho_2$, vem que a definição de τ é independente da escolha de $\lambda \in \mathrm{Aut}(U)$ tal que $((S)\sigma)^\lambda \leqslant P$. Com uma segunda aplicação do lema anterior, onde ρ_1 e ρ_2 são isomorfismos arbitrários de X para U, temos que θ é independente do ρ escolhido. □

Observação. Tendo em conta o corolário anterior, sempre que necessário, podemos referir-nos a τ apenas como $\tau_{\left(X,S/S_0 \to P^*/P_0^*\right)}$.

Definição 5.4.1. Com G, X e S, como na construção anterior, definimos o seguinte homomorfismo:

$$\Psi_{X,G} = \Psi_{\left(X,G \to P^*/P_0^*\right)} = V_{G \to S/S_0} \circ \tau_{\left(X,S/S_0 \to P^*/P_0^*\right)} : G \to P^*/P_0^*$$

onde $V_{G \to S/S_0}$ é o homomorfismo transferência.

Lema 5.4.2. *A definição de $\Psi_{X,G}$ é independente do $S \in \mathrm{Syl}_p(N_G(X))$ escolhido. Para além disso, a definição deste também não se altera se, em vez de X, tomarmos algum seu G-conjugado.*

Demonstração. Tomemos $Y = X^a$, para algum $a \in G$. Daqui concluímos que $S^a \in \mathrm{Syl}_p(N_G(X^a)) = \mathrm{Syl}_p(N_G(Y))$. Seja $T \in \mathrm{Syl}_p(N_G(Y))$. Então pelo teorema de Sylow em $N_G(Y)$, existe $c \in N_G(Y)$, tal que $S^{ac} = T$. Ora, pondo $b = ac$, vem que $Y = X^a = X^{ac} = X^b$, pois $c \in N_G(Y)$. Denotando $T_0 = \{T; N_G(Y)\}$, com a devida notação, sai que $T_0 = S_0^b$. Tomando um isomorfismo $\rho : X \to U$, também $\overline{b} \circ \rho : X \to U$ é um isomorfismo.
Dado $g \in G$, suponhamos que $sS_0 = (g)V_{G \to S/S_0}$. Então, usando a proposição 1.3.3 na terceira e quarta igualdades, vem:

$$s^b T_0 = (sS_0)^b = \big((g)V_{G \to S/S_0}\big)^b = (g^b)V_{G^b \to S^b/S_0^b} = (g)V_{G \to T/T_0}.$$

Logo, $(g)V_{G \to T/T_0} = s^b T_0$ e temos que, se $\lambda \in \mathrm{Aut}(U)$:

$$\begin{aligned}(g)\Psi_{Y,G} =& (s^b T_0)\tau_{\left(Y,T/T_0 \to P^*/P_0^*\right)} = \big(((s)\overline{b})\sigma\big)^\lambda P_0^* = (\rho^{-1} \circ \overline{b^{-1} s b} \circ \rho)^\lambda P_0^* = \\ & ((\overline{b} \circ \rho)^{-1} \circ \overline{s} \circ (\overline{b} \circ \rho))^\lambda P_0^* = (sS_0)\tau_{\left(X,S/S_0 \to P^*/P_0^*\right)} = (g)\Psi_{X,G}\end{aligned}$$

Donde concluímos o resultado pretendido. □

Definição 5.4.2 (Brison [6], cf Berger [4])**.** Seja $G \in \mathfrak{F}$. Se $\mathcal{C}(U,G) \neq \varnothing$, tomemos $\{X_1, \dots, X_n\}$, um conjunto de representantes para as classes de conjugação de G

em $\mathcal{C}(U,G)$.
Para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, pelo facto de m.d.c.$(p, |N_G(X_i) : S_i|) = 1$, com $S_i \in \mathrm{Syl}_p(N_G(X_i))$, escolhamos $e_i \in \mathbb{N}$, tal que:

$$e_i |N_G(X_i) : S| \equiv 1 \pmod{p^w}, \tag{1}$$

onde p^w é o expoente de P^*/P_0^*, para algum $w \in \mathbb{N}$. A partir do homomorfismo $\Psi_{X_i,G}$ acima construído, definimos o seguinte homomorfismo:

$$\begin{aligned} \delta_{\left(X_i,G\to P^*/P_0^*\right)} = \delta_{X_i,G} : \ & G \longrightarrow P^*/P_0^* \\ & g \mapsto ((g)\Psi_{X_i,G})^{e_i}. \end{aligned}$$

Com este homomorfismo, podemos construir o homomorfismo $d_G^R = d^{R,\mathfrak{F}}_{G\to P^*/P_0^*} : G \to P^*/P_0^*$, definido por:

$$(g)d_G^R = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathcal{C}(U,G) = \varnothing, \\ \prod_{i=1}^{n} (g)\delta_{X_i,G} & \text{se } \mathcal{C}(U,G) \neq \varnothing. \end{cases}$$

Observação. (a) Como m.d.c.$(p, |N_G(X_i)|) = 1$, a definição de $\delta_{X_i,G}$ é independente da escolha do e_i satisfazendo a equação (1) da definição anterior. Para além disso, pelo lema anterior, a definição de d_G^R é independente dos representantes das classes de conjugação escolhidos;

(b) Se $\phi : G \to H$ for um isomorfismo, é evidente que $d_G^R = (g)\phi \circ d_H^R$.

Apesar de interessante, não apresentaremos a demonstração do lema seguinte, visto ser demasiado técnica, envolvendo bastantes cálculos com o homomorfismo transferência.

Lema 5.4.3 (Brison [6])**.** *Sendo $G \in \mathfrak{F}$ e $N \trianglelefteq G$, temos que $d_N^R = d_G^R\big|_N$.*

Lema 5.4.4 (Brison [7], cf Berger [4])**.** *Se $\mathfrak{F}$ for uma classe de Fitting e $\mathfrak{F}$ e $R = UP^* \in \mathscr{B}^p_{\mathfrak{F}}$ satisfizerem (η) da construção anterior, então:*

(a) $\ker(d_R^R) = UP_0^*$ *e* $\mathrm{Im}(d_R^R) = P^*/P_0^*$;

(b) Se $\tilde{R} \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}$, for tal que $\tilde{R} \not\cong R$ e $|\tilde{R}^{\mathfrak{N}}| \leqslant |R^{\mathfrak{N}}|$, então $(\tilde{R})d^R_{\tilde{R}} = 1$.

Demonstração. (*a*) Ora, $U = O^p(R)$ e portanto $\mathcal{C}(U,R) = \{U\}$. Assim sendo, concluímos que:

$$d_R^R = d^{R,\mathfrak{F}}_{R\to P^*/P_0^*} = \delta_{\left(U,R\to P^*/P_0^*\right)} = \delta_{U,R}. \tag{1}$$

Seja $\hat{P} \in \mathrm{Syl}_p(R)$, tal que $P^* \leqslant \hat{P}$, $n = |R : \hat{P}|$ e ponhamos também $\hat{P}_0 = \{\hat{P}; R\}$. Se $x \in P^*$, pela proposição 1.3.4, temos que:

$$(x)V_{R \to \hat{P}/\hat{P}_0} = x^n P_0^*.$$

Consideremos a identidade $\rho : U \to U$. Então ρ induz um homomorfismo $\sigma : R = N_R(U) \to \mathrm{Aut}(U)$, como feito anteriormente. Como $P^* \leqslant \mathrm{Aut}(U)$ e $R = U \rtimes P^*$, então $(x)\sigma = x \in P^*$. Pela construção atrás exibida, vem que:

$$(x^n \hat{P}_0)\tau_{\left(U, \hat{P}/\hat{P}_0 \to P^*/P_0^*\right)} = x^n P_0^*$$

Pela definição de n, podemos tomar $b \in \mathbb{N}$ tal que $bn \equiv 1 \pmod{exp(P^*/P_0^*)}$. Por definição sai que:

$$\begin{aligned}(x)\delta_{\left(U, R \to P^*/P_0^*\right)} &= \left((x)V_{R \to \hat{P}/\hat{P}_0} \circ \tau_{\left(U, \hat{P}/\hat{P}_0 \to P^*/P_0^*\right)}\right)^e \\ &= (x^n P_0^*)^e \text{ (por (1) e (2))} \\ &= x P_0^*\end{aligned}$$

Logo $\delta_{U,R}$ induz o epimorfismo canónico de P^* para P^*/P_0^*. Em particular, $\mathrm{Im}(\delta_{U,R}) = P^*/P_0^*$ e por (1) vem $Im(d_R^R) = P^*/P_0^*$. Por outro lado $U = O^p(U)$ e P^*/P_0^* é um p-grupo, logo $U \leqslant \ker(\delta_{U,R})$. Como, $P_0^* \leqslant \ker(\delta_{U,R})$, vem que $\ker(\delta_{U,R}) = UP_0^*$.
(b) Temos $(\tilde{R})d_{\tilde{R}}^R \leqslant P^*/P_0^*$. Devido a este facto, se $\tilde{R} \in \mathscr{R}_{\mathfrak{F}}^q$, para algum $q \neq p$, temos de ter $(\tilde{R})d_{\tilde{R}}^R = 1$. Como $|\tilde{R}^{\mathfrak{N}}| \leqslant |R^{\mathfrak{N}}|$, ou temos $\mathcal{C}(U, \tilde{R}) = \varnothing$, ou $\tilde{R}^{\mathfrak{N}} = O^p(\tilde{R}) \simeq U = R^{\mathfrak{N}}$. Mas, se $\tilde{R}^{\mathfrak{N}} \simeq U$, vinha, por definição de grupo que relevante, que $\tilde{R} \simeq (UP)_{\mathfrak{F}} \simeq R$, o que contradiz a hipótese. Logo $\mathcal{C}(U, \tilde{R}) = \varnothing$ e o resultado pretendido sai por definição de $d_{\tilde{R}}^R$. □

Teorema 5.4.5 (Brison [7], cf Berger [4])**.** *Na notação acumulada,* $(P^*/P_0^*, d_G^{R,\mathfrak{F}})$ *é um par de Fitting de* $\mathfrak{F}$*.*

Demonstração. Vejamos que $(P^*/P_0^*, d_G^{R,\mathfrak{F}})$ satisfaz as condições $(i), (ii)$ e (iii) da definição 4.1.2. Se $G \in \mathfrak{F}$, então por construção $d_{G \to P^*/P_0^*}^{R,\mathfrak{F}}$ é um homomorfismo de G para P^*/P_0^* e a condição (i) é satisfeita. A condição (ii), resulta do lema 5.4.3, juntamente com a observação (b) a seguir à definição 5.4.2. Finalmente, como pela alínea (a) do lema anterior, $\mathrm{Im}(d_R^R) = P^*/P_0^*$, temos (iii). □

5.5 Teorema de Berger para classes de Fischer

Teorema 5.5.1 (Brison [7], cf Berger [4])**.** *Se* $\mathfrak{F}$ *for uma classe de Fischer e* $G \in \mathfrak{F}$*, então:*

$$G_{\mathfrak{F}*} = \bigcap \left\{ \ker(d_G^{R,\mathfrak{F}}) : R \in \mathscr{B}_{\mathfrak{F}}^p, \text{ com } p \mid |G/G^{\mathfrak{N}}| \text{ e } R^{\mathfrak{N}} \textit{ isn } G^{\mathfrak{N}} \right\}.$$

Demonstração. Se $\mathfrak{F}$ for uma classe de Fischer, como observámos na nota de rodapé da construção efectuada, é possível construir $(P^*/P_0^*, d_G^{R,\mathfrak{F}})$, que como vimos no teorema anterior é, de facto, um par de Fitting de $\mathfrak{F}$.
A condição (a) do teorema 5.3.3 é trivialmente satisfeita por este par e as condições (b) e (c) do mesmo, resultam das alíneas (a) e (b) do lema anterior. Daqui concluímos que:

$$G_{\mathfrak{F}*} = \bigcap \left\{ \ker(d_G^{R,\mathfrak{F}}) : R \in \mathscr{B}_{\mathfrak{F}}^p, \text{ com } p \mid |G/G^{\mathfrak{N}}| \text{ e } |R^{\mathfrak{N}}| \leqslant |G^{\mathfrak{N}}| \right\}.$$

Se $\text{Subnemb}(R^{\mathfrak{N}}, G) = \varnothing$, então por construção, $(G)d_G^{R,\mathfrak{F}} = 1$ e portanto $\ker(d_G^{R,\mathfrak{F}}) = G$, não sendo importante para a interseção em questão. No entanto, se $\text{Subnemb}(R^{\mathfrak{N}}, G) \neq \varnothing$, ou seja, $R^{\mathfrak{N}}$ *isn* G, então como $R^{\mathfrak{N}} = O^p(R^{\mathfrak{N}})$ e $p \mid |G/G^{\mathfrak{N}}|$, temos de ter $R^{\mathfrak{N}}$ *isn* $G^{\mathfrak{N}}$ e concluímos o resultado pretendido. $\square$

Bibliografia

[1] Adolfo Ballester-Bolinches and Luis M. Ezquerro. *Classes of finite groups*, volume 584 of *Mathematics and Its Applications (Springer)*. Springer, Dordrecht, 2006. ISBN 978-1-4020-4718-3; 1-4020-4718-5.

[2] Maria Bellani Tamburini and Lino Di Martino. *I sottogruppi nilpotenti autonormalizzanti di S_n e di A_n*. *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, 110 (2):235–241 (1977), 1976.

[3] Thomas R. Berger. *Normal Fitting pairs and Lockett's conjecture*. *Math. Z.*, 163(2):125–132, 1978. ISSN 0025-5874. doi: 10.1007/BF01214059.

[4] Thomas R. Berger. *The smallest normal Fitting class revealed*. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 42(1):59–86, 1981. ISSN 0024-6115. doi: 10.1112/plms/s3-42.1.59.

[5] Dieter Blessenohl and Wolfgang Gaschütz. *über normale schunck- und fittingklassen*. *Math. Z.*, 118:1–8, 1970. ISSN 0025-5874.

[6] Owen J. Brison. *On the theory of Fitting classes of finite groups*. PhD thesis, University of Warwick, 1978.

[7] Owen J. Brison. *Relevant groups for Fitting classes*. *J. Algebra*, 68(1):31–53, 1981. ISSN 0021-8693. doi: 10.1016/0021-8693(81)90283-0.

[8] Owen J. Brison. *Grupos e Representações*. Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa, 1999.

[9] R. A. Bryce and John Cossey. *A problem in the theory of normal Fitting classes*. *Math. Z.*, 141:99–110, 1975. ISSN 0025-5874.

[10] A. R. Camina. *A short survey of Fitting classes*. In *The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Univ. California, Santa Cruz, Calif., 1979)*, volume 37 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 209–212. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980.

[11] Roger W. Carter. *Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups*. *Math. Z.*, 75:136–139, 1960/1961. ISSN 0025-5874.

[12] John Cossey. *Classes of finite soluble groups.* In *Proceedings of the Second International Conference on the Theory of Groups (Australian Nat. Univ., Canberra, 1973)*, pages 226–237. Lecture Notes in Math., Vol. 372, Berlin, 1974. Springer.

[13] John Cossey. *Products of Fitting classes. Math. Z.*, 141:289–295, 1975. ISSN 0025-5874.

[14] Rex S. Dark. *Some examples in the theory of injectors of finite soluble groups. Math. Z.*, 127:145–156, 1972. ISSN 0025-5874.

[15] Klaus Doerk and Trevor Hawkes. *Finite soluble groups*, volume 4 of *de Gruyter Expositions in Mathematics.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1992. ISBN 3-11-012892-6. doi: 10.1515/9783110870138.

[16] Klaus Doerk and Marcel Porta. *über vertauschbarkeit, normale einbettung und dominanz bei fittingklassen endlicher auflösbarer gruppen. Arch. Math. (Basel)*, 35(4):319–327, 1980. ISSN 0003-889X. doi: 10.1007/BF01235351.

[17] B. Fischer. *Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen.* Habilitationsschrift Univ. Frankfurt (M), 1995.

[18] B. Fischer, W. Gaschütz, and B. Hartley. *Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen. Math. Z.*, 102:337–339, 1967. ISSN 0025-5874.

[19] H. Fitting. *Beiträge zur Theorie der endlichen Gruppen. Deutsch. Math.-Verein*, 48:77–141, 1938.

[20] Wolfgang Gaschütz. *Selected Topics in the Theory of Soluble Groups.* Lectures given at Ninth Summer Research Institute of the Austral. Math. Soc., Canberra, 1969; Notes by J. Looker.

[21] Wolfgang Gaschütz. *Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen. Math. Z.*, 80:300–305, 1962/1963. ISSN 0025-5874.

[22] P. Hall. *A Note on Soluble Groups. J. London Math. Soc.*, S1-3(2):98, . doi: 10.1112/jlms/s1-3.2.98.

[23] P. Hall. *On the System Normalizers of a Soluble Group. Proc. London Math. Soc.*, S2-43(6):507, . ISSN 0024-6115. doi: 10.1112/plms/s2-43.6.507.

[24] Peter Hauck. *Fittingklassen und Kranzprodukte. J. Algebra*, 59(2):313–329, 1979. ISSN 0021-8693. doi: 10.1016/0021-8693(79)90130-3.

[25] Peter Hauck. *On products of Fitting classes. J. London Math. Soc. (2)*, 20 (3):423–434, 1979. ISSN 0024-6107. doi: 10.1112/jlms/s2-20.3.423.

[26] T. O. Hawkes. *Finite soluble groups.* In *Group theory*, pages 13–60. Academic Press, London, 1984.

[27] John F. Humphreys. *A course in group theory.* Oxford Science Publications. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1996. ISBN 0-19-853453-1; 0-19-853459-0.

[28] B. Huppert. *Endliche Gruppen. I. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 134.* Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[29] I. Martin Isaacs. *Finite group theory*, volume 92 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. ISBN 978-0-8218-4344-4.

[30] Hartmut Laue, Hans Lausch, and Garry R. Pain. Verlagerung und normale Fittingklassen endlicher Gruppen. *Math. Z.*, 154(3):257–259, 1977. ISSN 0025-5874.

[31] Hans Lausch. *On normal Fitting classes. Math. Z.*, 130:67–72, 1973. ISSN 0025-5874.

[32] F. P. Lockett. *On the theory of Fitting classes of finite soluble groups.* PhD thesis, University of Warwick, 1971.

[33] F. P. Lockett. *On the theory of Fitting classes of finite soluble groups. Math. Z.*, 131:103–115, 1973. ISSN 0025-5874.

[34] F. P. Lockett. *The Fitting class* $\mathfrak{F}^*$. *Math. Z.*, 137:131–136, 1974. ISSN 0025-5874.

[35] A. Mann. *A criterion for pronormality. J. London Math. Soc.*, 44:175–176, 1969. ISSN 0024-6107.

[36] B. H. Neumann. *Varieties of groups. Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:603–613, 1967. ISSN 0002-9904.

[37] B. H. Neumann, Hanna Neumann, and Peter M. Neumann. *Wreath products and varieties of groups. Math. Z.*, 80:44–62, 1962. ISSN 0025-5874.

[38] Martyn Quick. *Topics in Groups.* Course given at the University Of St Andrews, 2009.

[39] Derek J. S. Robinson. *A course in the theory of groups*, volume 80 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1996. ISBN 0-387-94461-3. doi: 10.1007/978-1-4419-8594-1.

[40] John S. Rose. *A course on group theory.* 1978. ISBN 0-521-21409-2.

[41] Luís Sequeira. *Sobre Classes de Grupos Finitos e Resolúveis.* Master's thesis, Universidade de Lisboa, Lisboa, 1995.

[42] M. L. Sylow. Théorèmes sur les groupes de substitutions. *Math. Ann.*, 5(4): 584–594, 1872. ISSN 0025-5831. doi: 10.1007/BF01442913.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{P}$	conjunto dos números primos
$\leqslant$	subgrupo de
$<$, $\lneq$	subgrupo próprio de
$\trianglelefteq$	subgrupo normal de
$\trianglelefteq\trianglelefteq$	subgrupo subnormal de
$\trianglelefteq\cdot$	subgrupo maximal normal de
$\cdot\trianglelefteq$	subgrupo minimal normal de
car	subgrupo característico de
pr	pronormal em
$N_G(H)$	normalizador de H em G
$C_G(H)$	centralizador de H em G
$Z(G)$	centro de G
$\ker\phi$	núcleo do homomorfismo ϕ
$\mathrm{Im}\phi$	imagem do homomorfismo ϕ
$[x,y]$	comutador de x e y: $x^{-1}y^{-1}xy$
$[H,K]$	comutador de H e K: $\langle [h,k] : h \in H, k \in K \rangle$
G'	grupo derivado: $[G,G]$
$G \times H$	produto directo de G e H
$G \rtimes H$	produto semidirecto de G e H
$G \underset{\mathrm{reg}}{\wr} H$	produto em coroa regular de G por H
$\mathrm{Aut}(G)$	grupo dos automorfismos de G

$\mathrm{Inn}(G)$	grupo dos automorfismos interiores de G
$\mathrm{Syl}_p(G)$	conjunto dos p-subgrupos de Sylow de G
$\mathrm{Hall}_\pi(G)$	conjunto dos π-subgrupos de Hall de G
C_n	grupo cíclico de ordem n
S_n	grupo simétrico de grau n
A_n	grupo alternado de grau n
$\Sigma \searrow H$	sistema de Hall Σ reduz-se a H
$G_{\mathfrak{X}}$	$\mathfrak{X}$-radical de G
$G^{\mathfrak{X}}$	$\mathfrak{X}$-resíduo de G
$F(G)$	subgrupo de Fitting de G
$O^\pi(G)$	menor subgrupo normal de G tal que $G/O^\pi(G)$ é um π-grupo
$O_\pi(G)$	maior π-subgrupo normal de G
$\Phi(G)$	subgrupo de Frattini de G
$\mathfrak{E}$	classe dos grupos finitos
$\mathfrak{S}$	classe dos grupos finitos e resolúveis
$\mathfrak{N}$	classe dos grupos finitos e nilpotentes
$\mathfrak{S}_p$	classe dos p-grupos finitos e resolúveis
$\mathfrak{S}_\pi$	classe dos π-grupos finitos e resolúveis
$\mathfrak{N}_p$	classe dos p-grupos finitos e nilpotentes
$\mathfrak{N}_\pi$	classe dos π-grupos finitos e nilpotentes
$\mathfrak{A}$	classe dos grupos finitos e abelianos
$\mathfrak{C}$	classe dos grupos cíclicos
$\mathrm{char}(\mathfrak{X})$	característica de $\mathfrak{X}$
$\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{G}$	produto de Fitting de $\mathfrak{F}$ por $\mathfrak{G}$
$\mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G)$	conjunto dos $\mathfrak{X}$-injectores de G
$\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$	secção de Lockett de $\mathfrak{F}$
$\mathrm{Nemb}(G, H)$	conjunto das imersões normais de G em H
$\mathrm{Subnemb}(G, H)$	conjunto das imersões subnormais de G em H

$\mathrm{Qnat}(G, \Delta)$	conjunto das imersões quasi-naturais de G em Δ
$V_{G \to H/H_0}$	transferência de G para H/H_0
$\mathscr{E}$	conjunto de representantes para as classes de isomorfismo de grupos finitos
$\mathscr{F}$	conjunto fundamental de $\mathfrak{F}$
$\mathrm{Hom}(G, H)$	conjunto dos homomorfismos de G em H
$\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, H)$	conjunto dos homomorfismos de grupos em $\mathscr{F}$ para H
$\Lambda(\mathfrak{F})$	grupo de Lausch de $\mathfrak{F}$
$\mathcal{C}(H, G)$	conjunto dos subgrupos subnormais de G isomorfos a H
$exp(G)$	expoente do grupo G
m.d.c.(m, n)	máximo divisor comum entre m e n

Índice